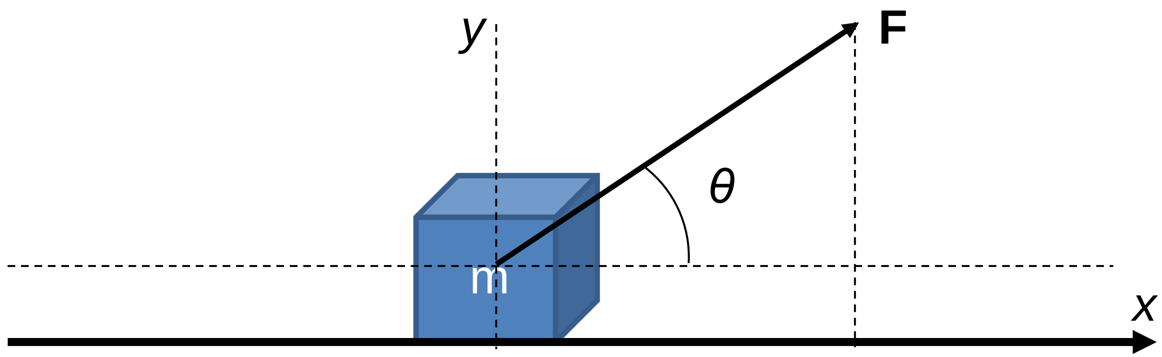
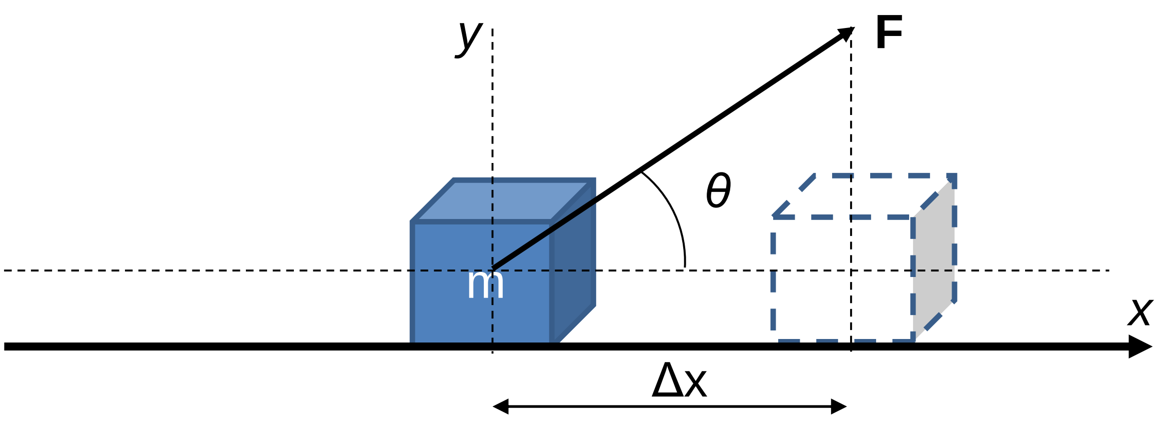
Mecânica Newtoniana: Trabalho e Energia

Prof. Dr. Walter F. de Azevedo Jr.   E-mail: walter@azevedolab.net

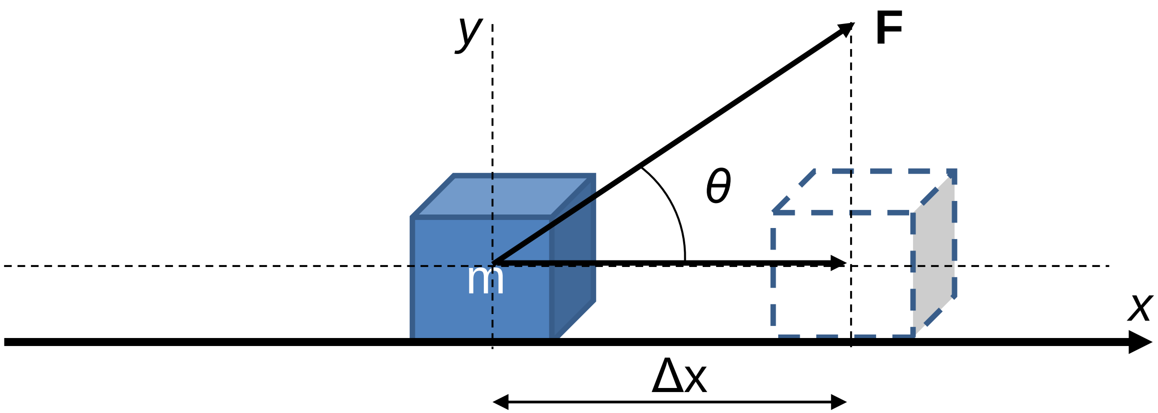
Consideremos o sistema abaixo, onde temos uma força constante (**F**) aplicada a um bloco de massa m que está numa superfície sem atrito.



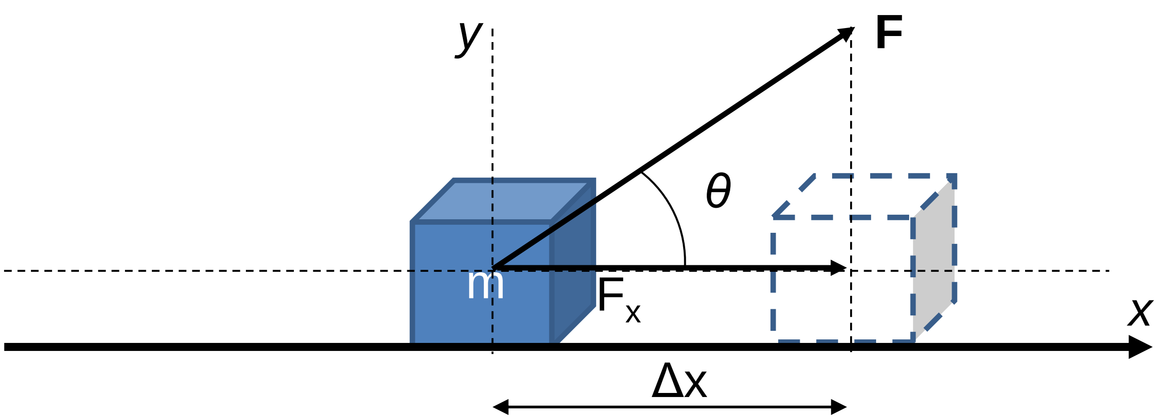
O bloco apresenta um deslocamento (Δx).



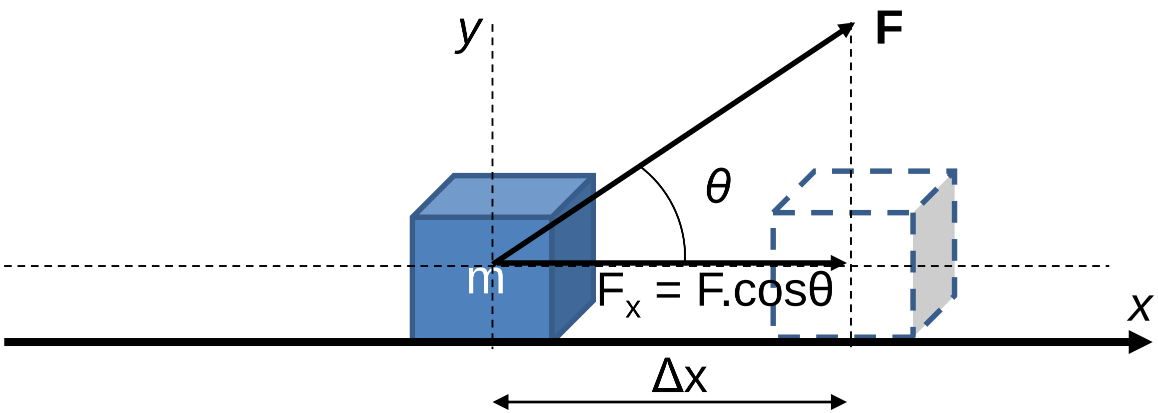
A força (**F**) faz um ângulo θ com a horizontal.



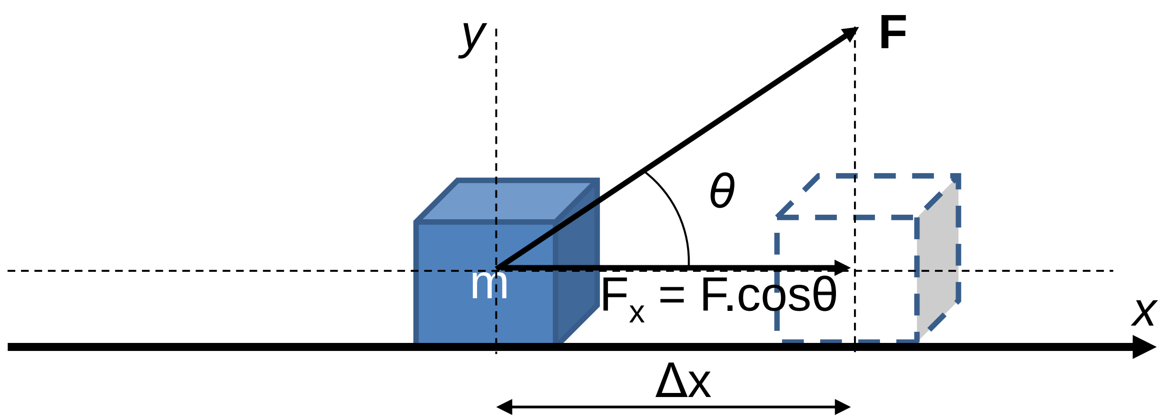
Para uma força **F** constante, temos a componente F_x ao longo do deslocamento (Δx), como indicado abaixo.



A componente horizontal da força tem a seguinte expressão: $F_x = F.\cos\theta$.

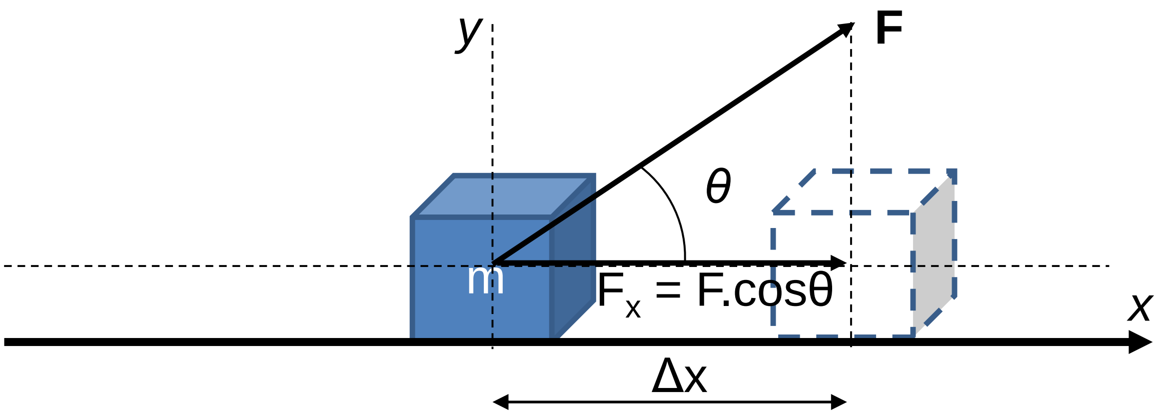


Para uma força **F** constante, o trabalho (W) realizado por esta força é igual à componente da força no sentido do deslocamento (F.cosθ) vezes a magnitude do deslocamento (Δx).



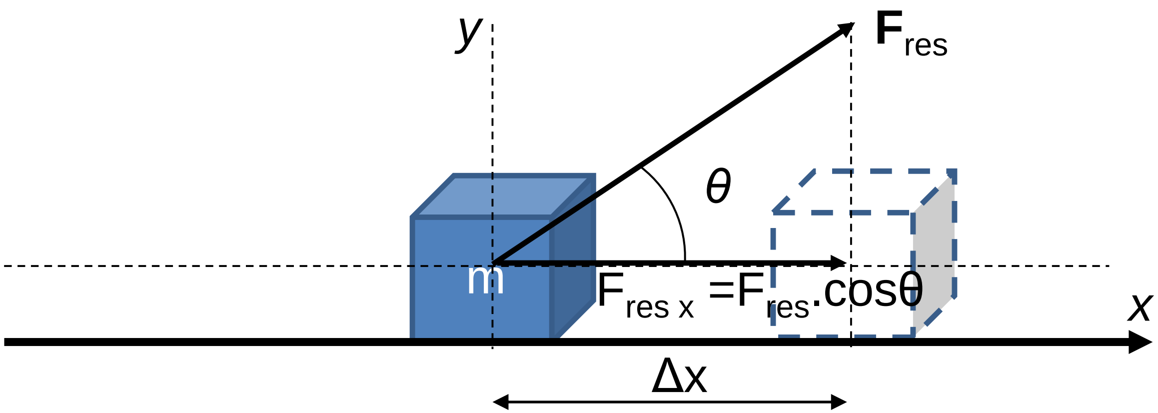
$$\boxed{W = F.\cos\theta.\Delta x}$$

Como podemos ver, o trabalho (W) é uma grandeza escalar, que tem unidades de N.m, chamada de Joule (J).



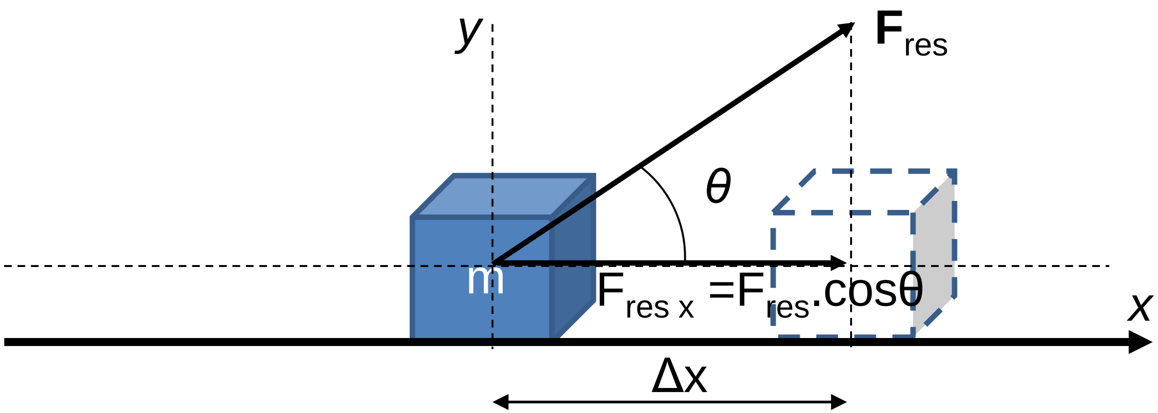
$$\boxed{W = F.\cos\theta.\Delta x}$$

Considerando-se um sistema com diversas forças que atuam sobre o bloco, temos que o trabalho total (W_{total}) é dado pela componente da força resultante ($\mathbf{F}_{res}$) ao longo do deslocamento (Δx), como indicado abaixo.



$$W_{Total} = F_{res}.\cos\theta.\Delta x$$

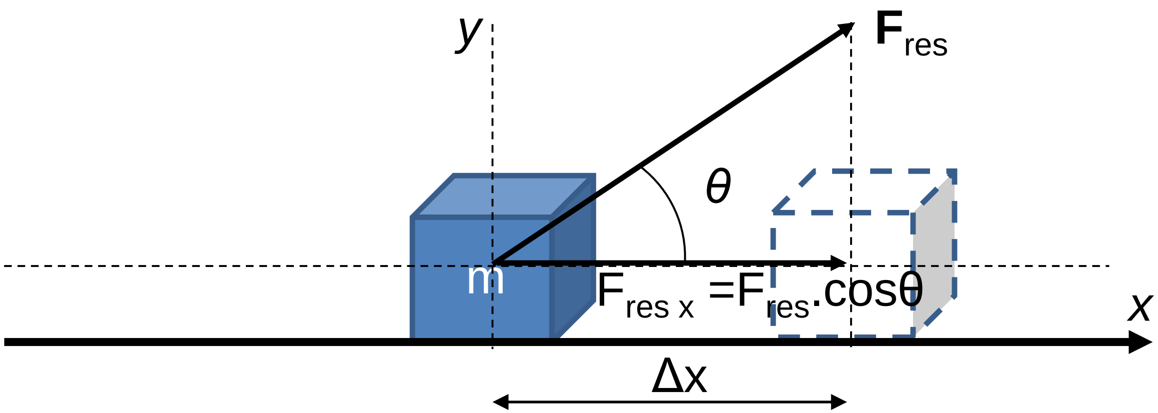
O sistema abaixo tem uma energia devido ao movimento, chamada de energia cinética (K). Além da energia cinética, o bloco tem uma energia potencial, devido à sua posição. De uma forma geral, podemos dizer que a energia de um sistema é uma medida da sua habilidade de realizar trabalho.



$$W_{Total} = F_{res\ x}.\Delta x = F_{res}.\cos\theta.\Delta x$$

Considerando-se que o sistema abaixo tem aceleração constante (a_x), podemos expressar sua velocidade final (v_f) em função da velocidade inicial (v_i), aceleração (a_x) e deslocamento (Δx) pela expressão abaixo.

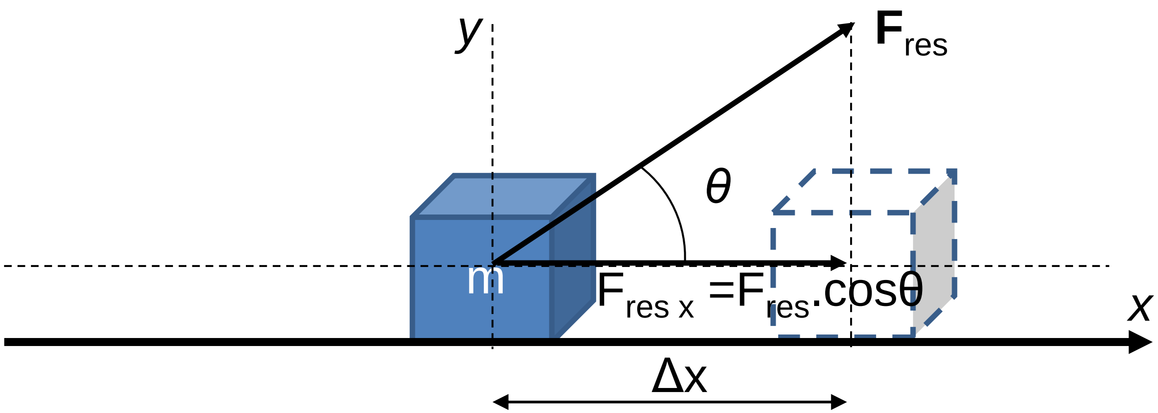
$$v_f^2 = v_i^2 + 2a_x\Delta x \Rightarrow \boxed{a_x = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta x}}$$



$$\boxed{W_{Total} = F_{res\,x}.\Delta x = F_{res}.\cos\theta.\Delta x}$$

Da segunda lei de Newton, sabemos que a projeção da força resultante ($F_{res\ x}$) é o produto da massa pela aceleração (a_x), assim temos:

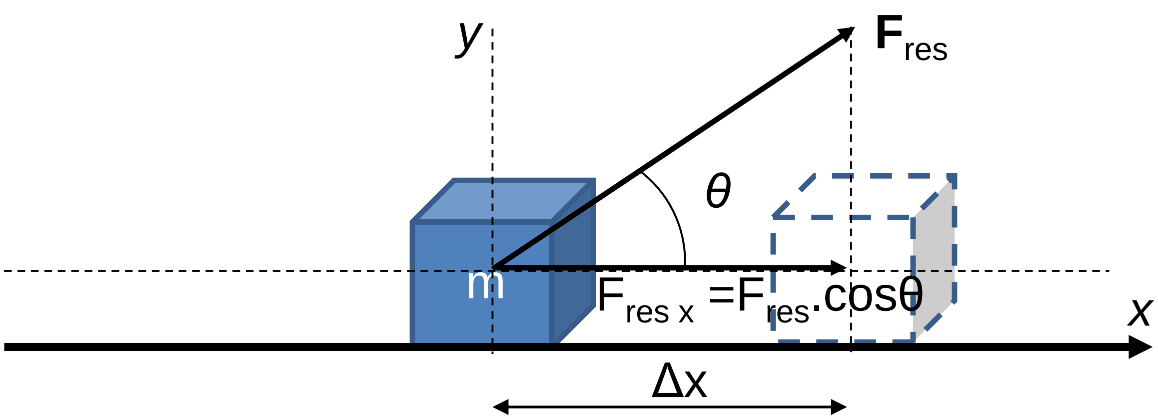
$$v_f^2 = v_i^2 + 2a_x\Delta x \Rightarrow \boxed{a_x = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta x}} \quad (1)$$



$$\boxed{W_{Total} = F_{res\ x}.\Delta x = ma_x\,\Delta x} \quad (2)$$

Podemos substituir a equação (1) na equação (2), como segue:

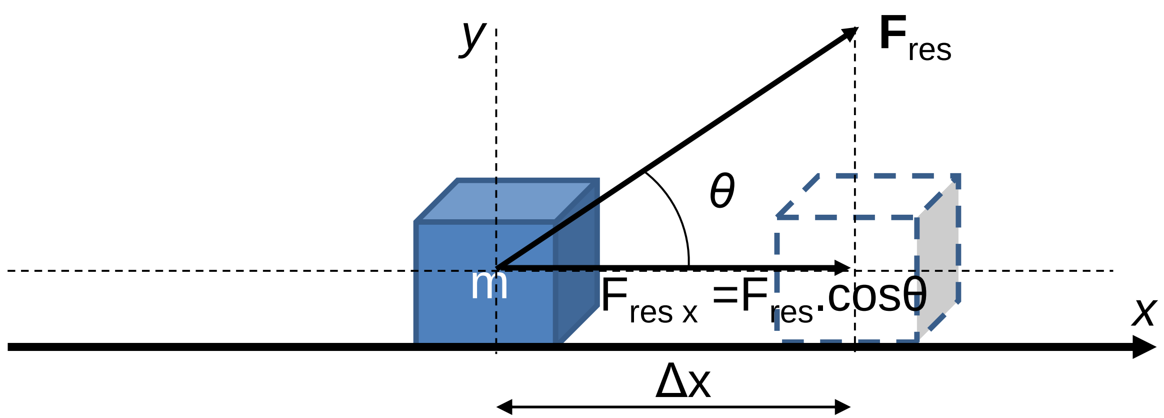
$$\boxed{a_x = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta x}} \quad (1)$$



$$W_{Total} = F_{res\,x}.\Delta x = ma_x\,\Delta x = m\left(\frac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta x}\right)\Delta x$$

Assim temos que o trabalho é a variação da energia cinética. A energia tem a mesma unidade do trabalho, Joule.

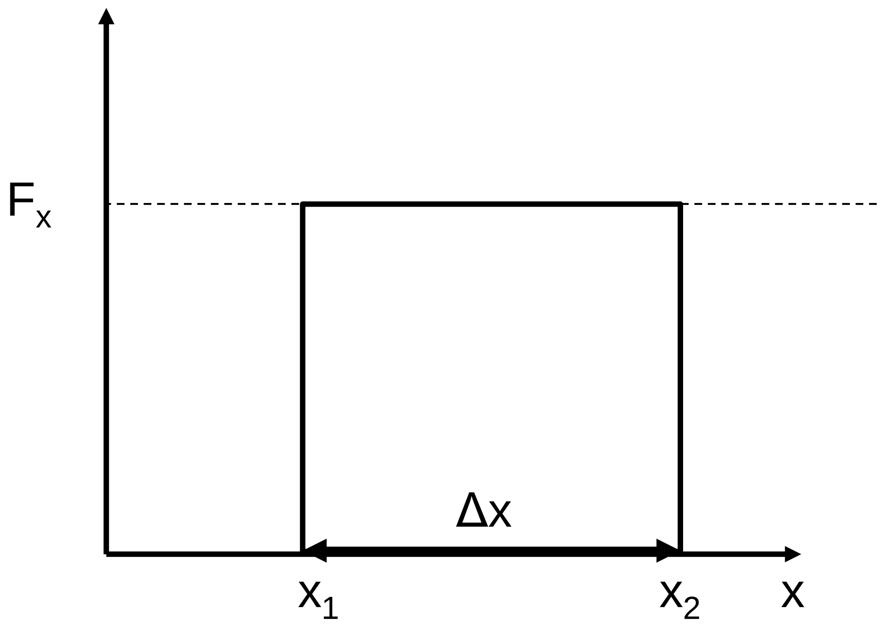
$$\boxed{a_x = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta x}} \quad (1)$$



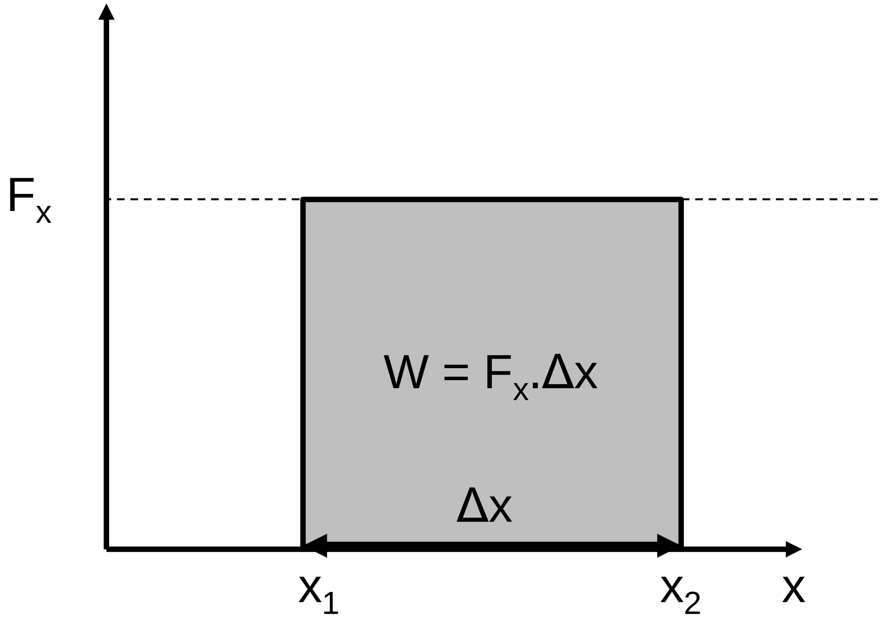
$$W_{Total} = F_{res\,x}.\Delta x = m a_x\, \Delta x = m\left(\frac{v_f^2 - v_i^2}{2\cancel{\Delta x}}\right) \cancel{\Delta x} = m\left(\frac{v_f^2 - v_i^2}{2}\right)$$

$$\boxed{W_{Total} = m\frac{v_f^2}{2} - m\frac{v_i^2}{2} = K_f - K_i = \Delta K}$$

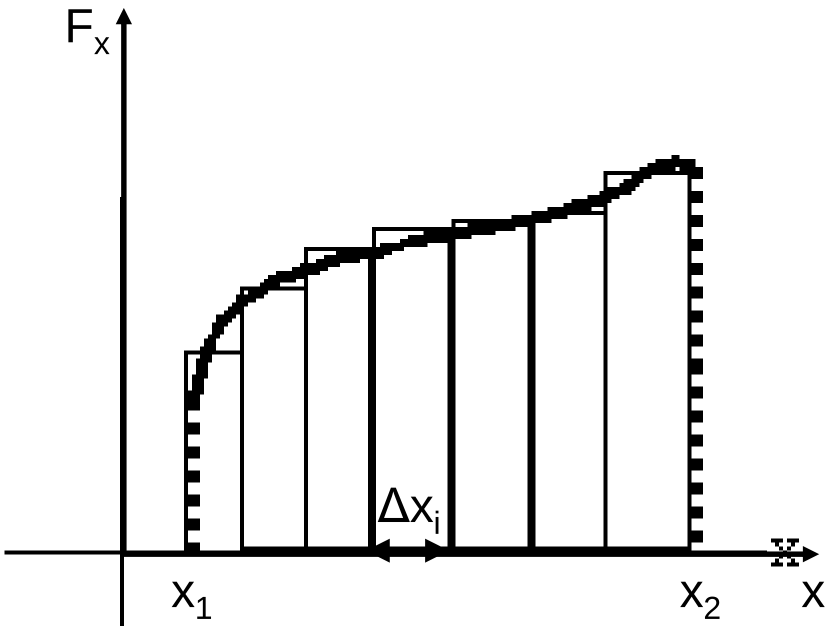
Abaixo temos o gráfico da força (F_x) em função da posição (x).



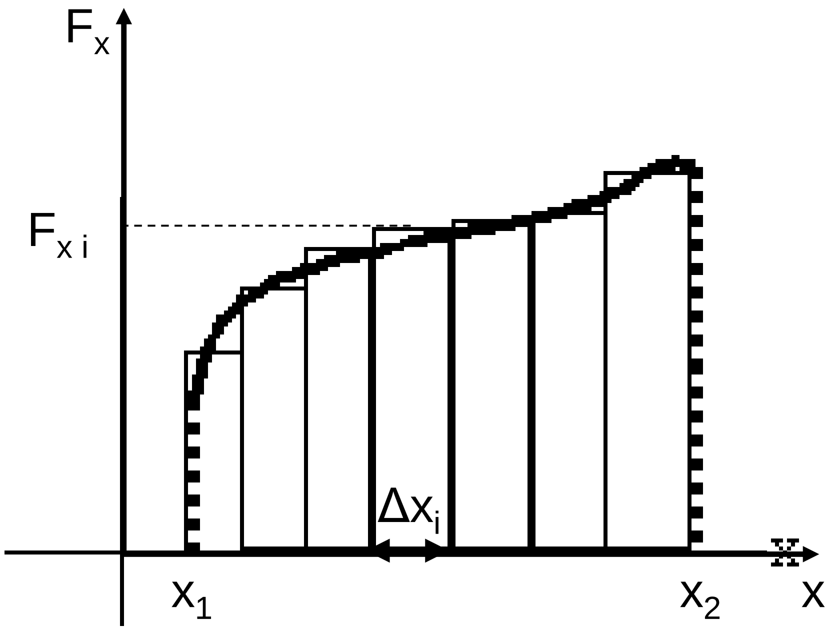
O trabalho (W) realizado pela força (F_x) é a área sombreada sob a reta no intervalo entre x_1 e x_2, como indicado abaixo.



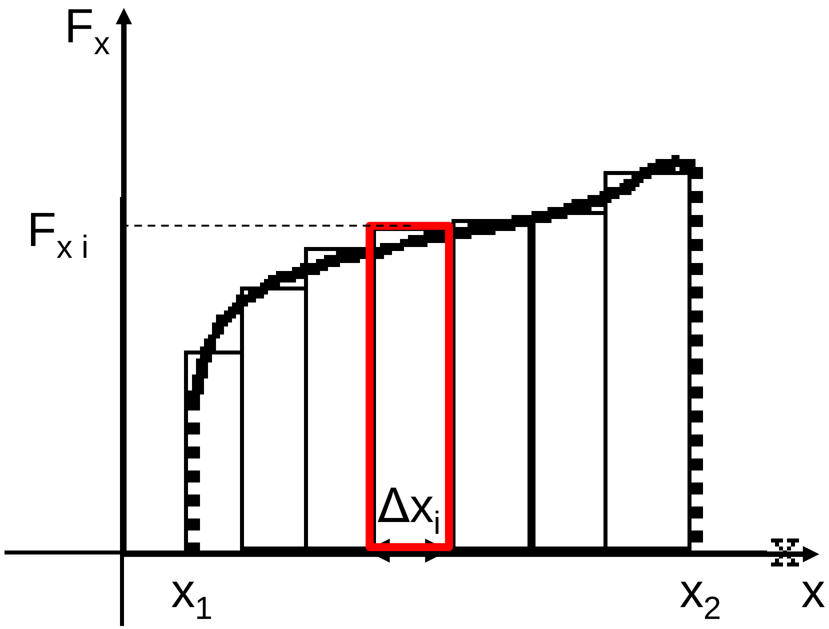
Quando temos uma força variável, como a indicada abaixo, ainda temos que o trabalho é dado pela área sob a curva. O desafio é determinarmos a área.



Se pegarmos um deslocamento infinitesimal (Δx_i), podemos considerar, com boa aproximação, que a força ($F_{x\ i}$) é aproximadamente constante neste intervalo, como indicado.



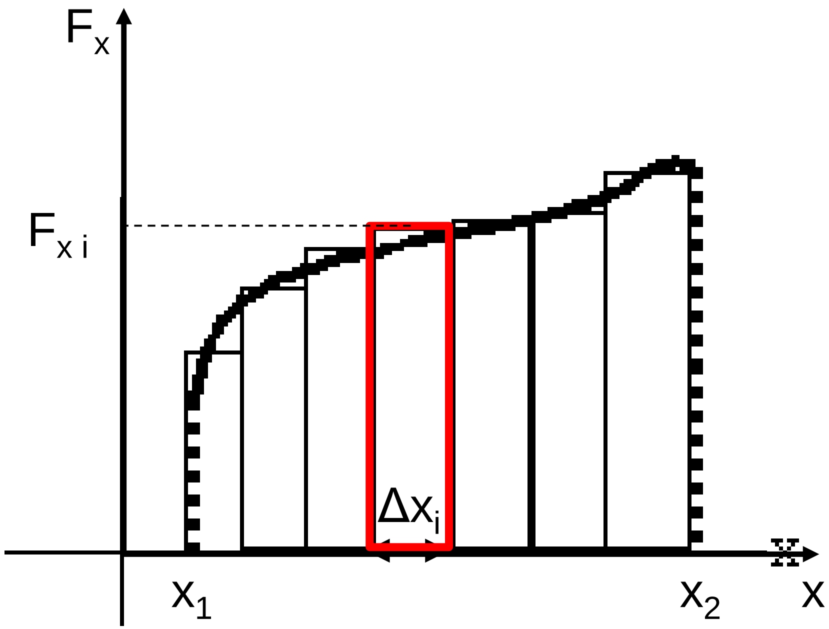
Assim, no pequeno retângulo em destaque, o trabalho infinitesimal (W_i) é dado por:



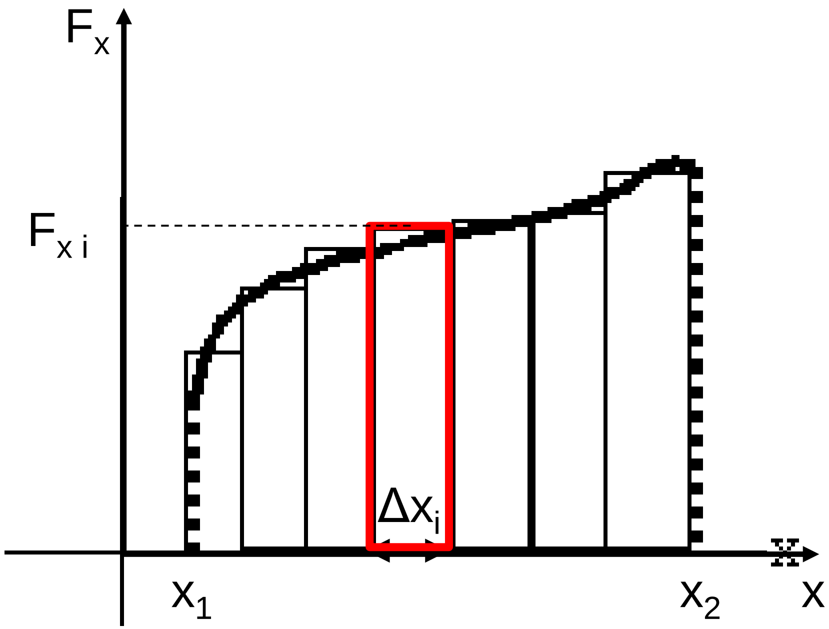
$$\boxed{W_i = F_{x\,i} . \Delta x_i}$$

Podemos pensar que área sob a curva é a soma de todos os trabalhos (W_i) quando o deslocamento (Δx_i) é bem pequeno.

$$\boxed{W_i = F_{x\,i} . \Delta x_i}$$

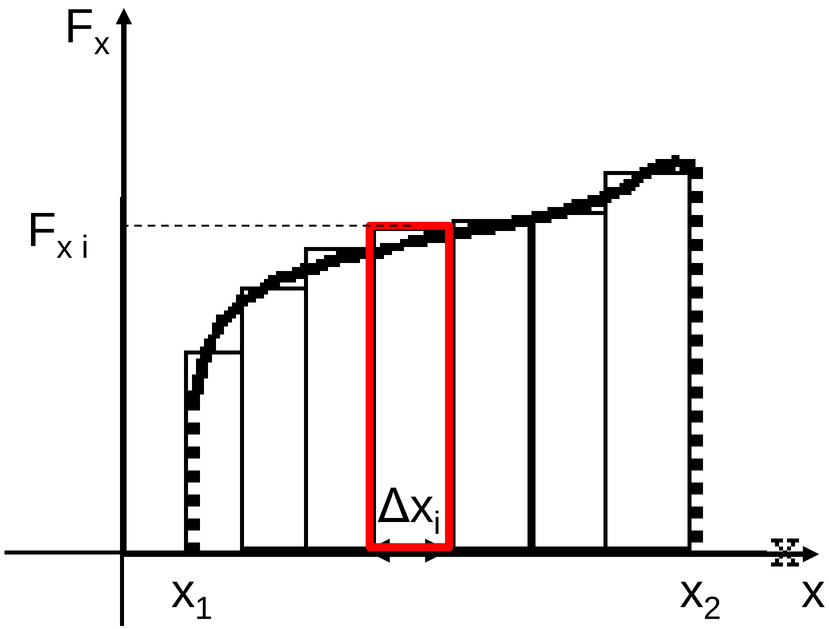


Usando a linguagem do cálculo, temos que o deslocamento (Δx_i) tende a zero, assim a somatória dos trabalhos infinitesimais nos dá a área sob a curva.



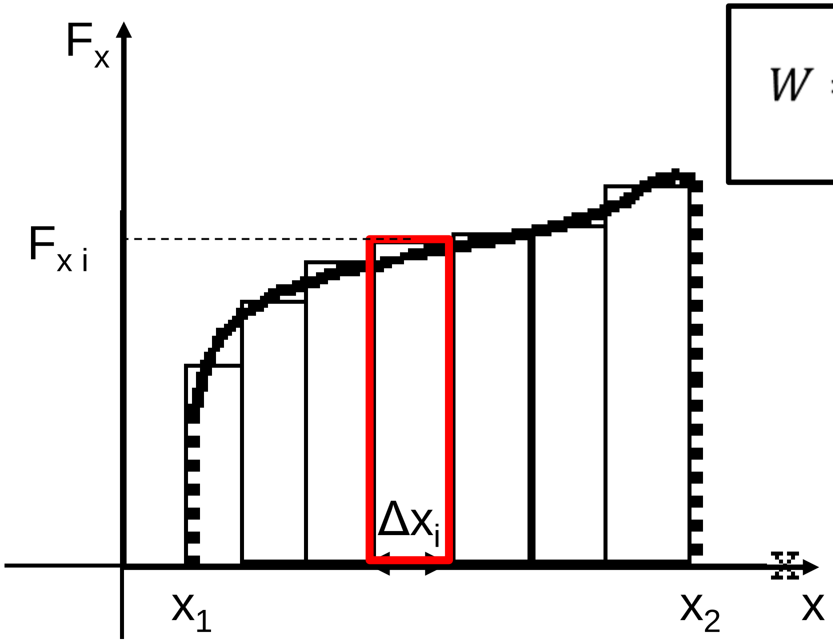
$$W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F_{x\,i} \cdot \Delta x_i$$

O limite da somatória nos dá a área sob a curva, que é o trabalho (W) realizado pela força variável (F_x).



$$W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F_{x\,i} \cdot \Delta x_i$$

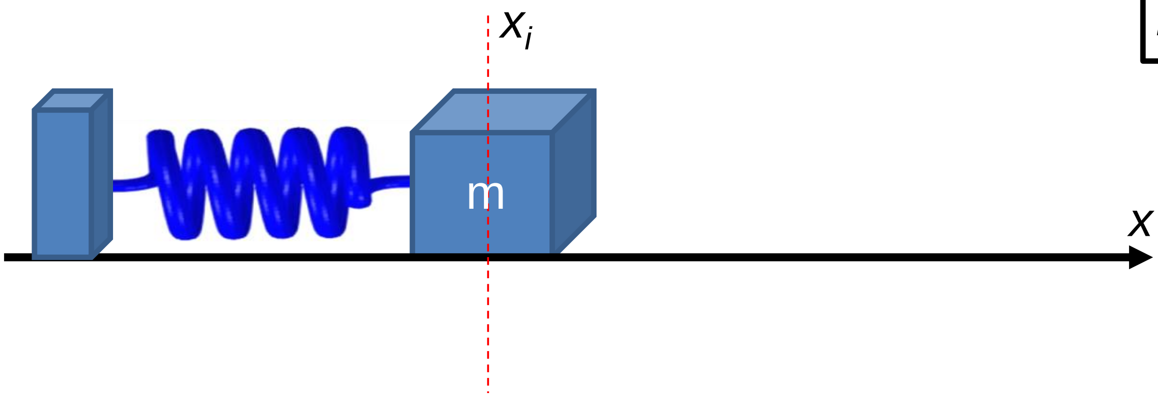
No cálculo, chamamos este limite de integral, indicado abaixo.



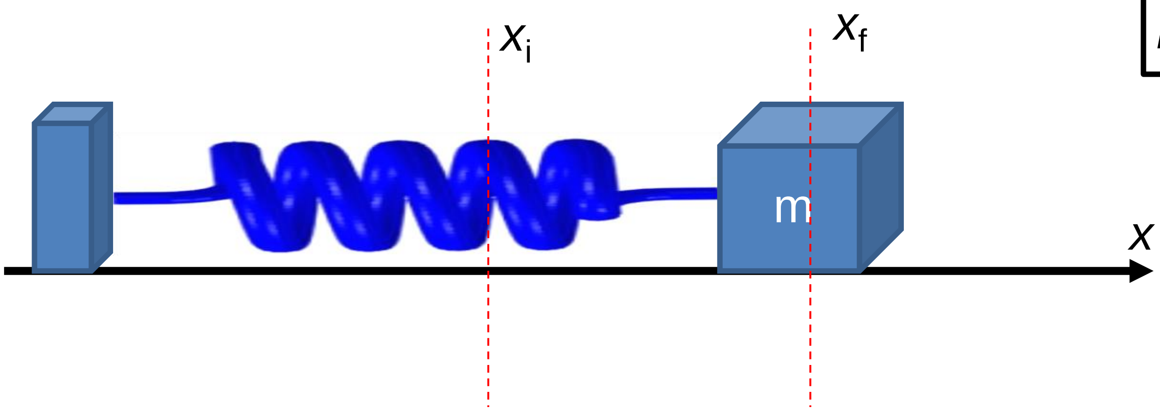
$$\boxed{W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F_{x\,i} \cdot \Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} F_x \, dx}$$

Um sistema massa-mola apresenta uma força variável com o deslocamento, como indicado pela equação abaixo. Vamos determinar o trabalho (W) realizado por uma mola.

$$\boxed{F_x = -kx}$$

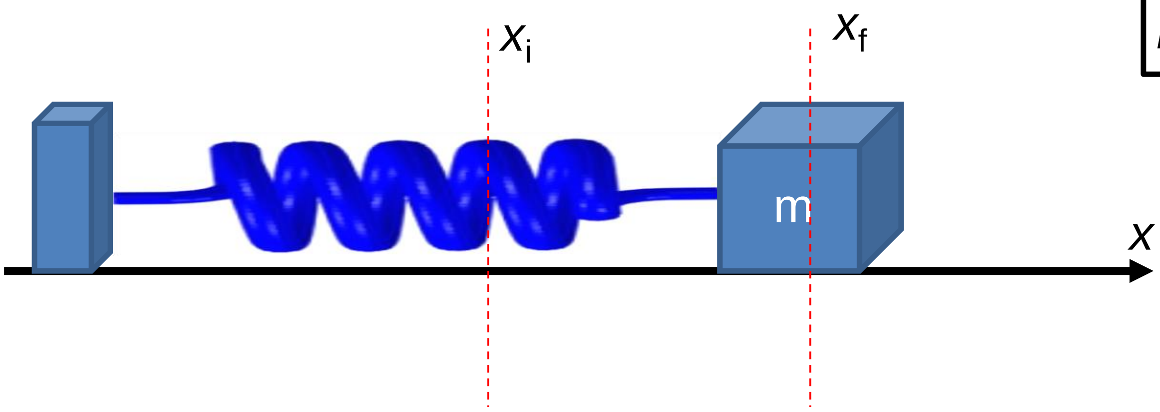


Vamos considerar um movimento geral, onde o bloco ligado à mola, realiza um movimento da posição x_i até a posição x_f.



$$\boxed{F_x = -kx}$$

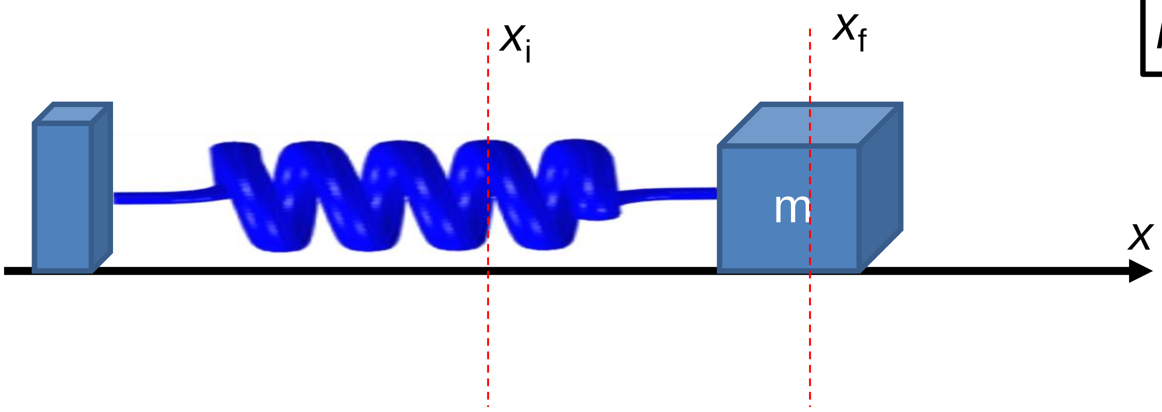
O trabalho é calculado a partir da integral da força da posição x_i até a posição x_f, como indicado abaixo.



$$F_x = -kx$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

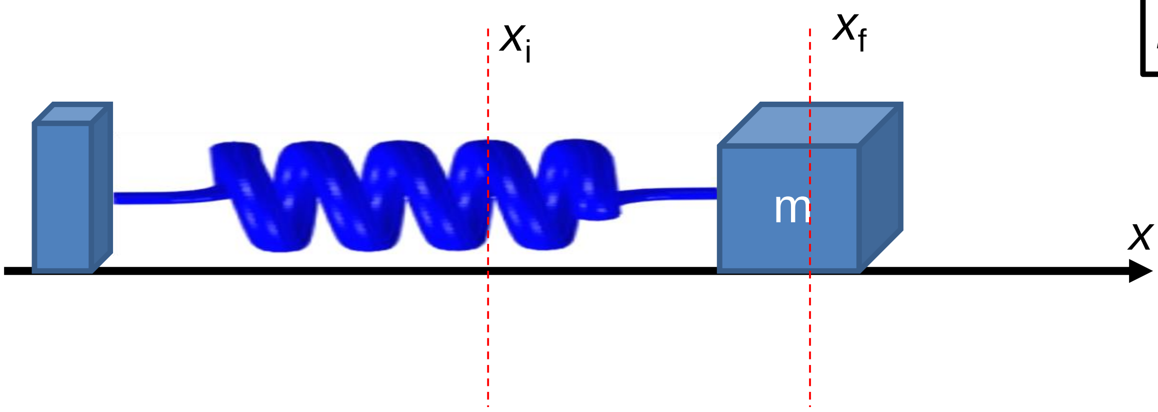
Substituindo-se a expressão da força na integral, temos:



$$F_x = -kx$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx$$

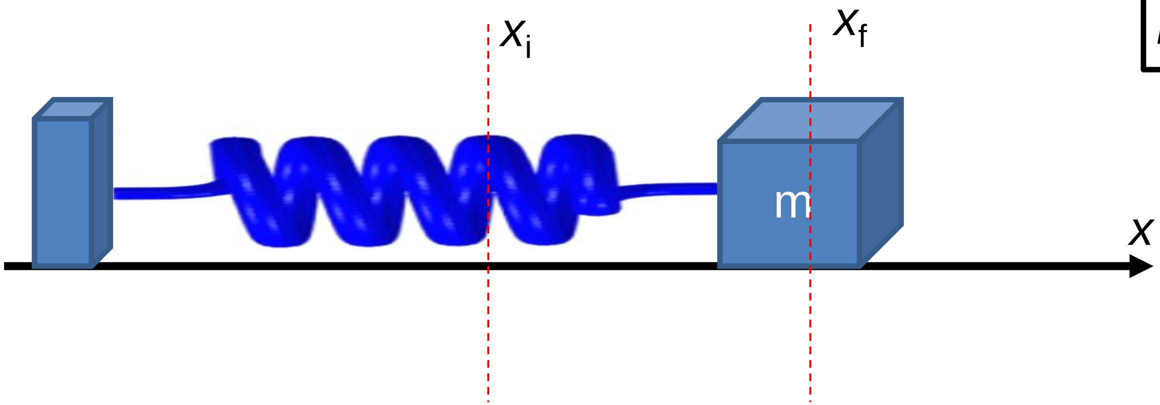
O valor da constante elástica da mola (k) não varia, assim pode ser tirada da integral.



$$\boxed{F_x = -kx}$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx$$

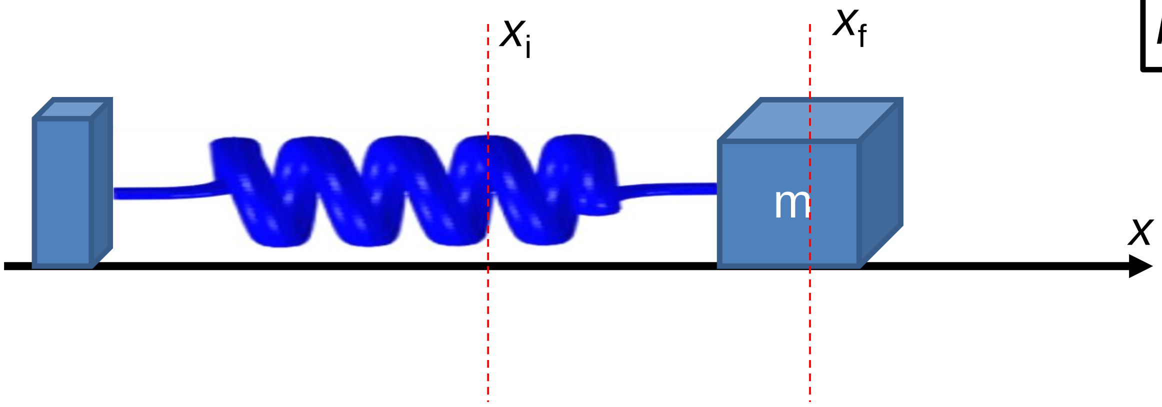
O resultado da integral de xdx é $x^2/2$, assim temos:



$F_x = -kx$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx = \left. \frac{-kx^2}{2} \right|_{x_i}^{x_f} =$$

Determinamos para os extremos.

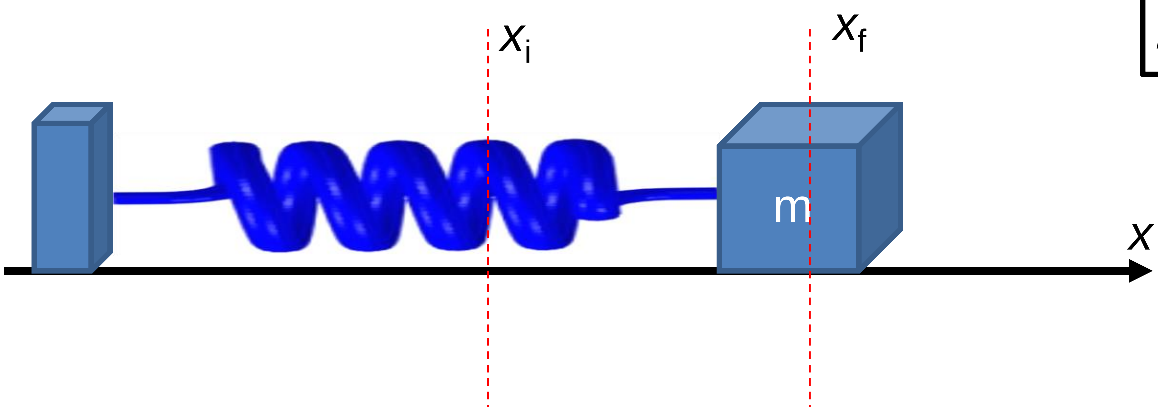


$$F_x = -kx$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = -k\int_{x_i}^{x_f} x dx = \left.\frac{-kx^2}{2}\right|_{x_i}^{x_f} = \frac{-kx_f^2}{2} - \frac{-kx_i^2}{2} =$$

Trabalho Realizado por Uma Mola

Continuando, temos o trabalho realizado pela mola.



$$\boxed{F_x = -kx}$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f}(-kx)dx = -k\int_{x_i}^{x_f} x dx = \left.\frac{-kx^2}{2}\right|_{x_i}^{x_f} = \frac{-kx_f^2}{2} - \frac{-kx_i^2}{2} = \frac{kx_i^2}{2} - \frac{kx_f^2}{2} =$$

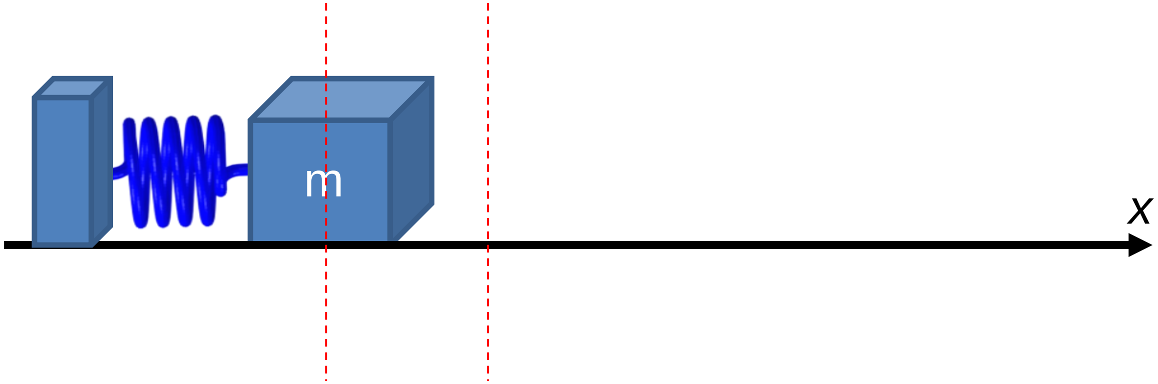
$$\boxed{W = \frac{kx_i^2}{2} - \frac{kx_f^2}{2}}$$

Exemplo 1. Um bloco de 4 kg está sobre uma mesa sem atrito e preso a uma mola horizontal com k = 400 N/m. A mola é inicialmente comprimida de 5 cm. Encontre (a) o trabalho realizado sobre o bloco pela mola enquanto o bloco se move de x_1 = -5 cm até sua posição de equilíbrio x_2 = 0 cm, e (b) a velocidade do bloco em x_2 = 0 cm.

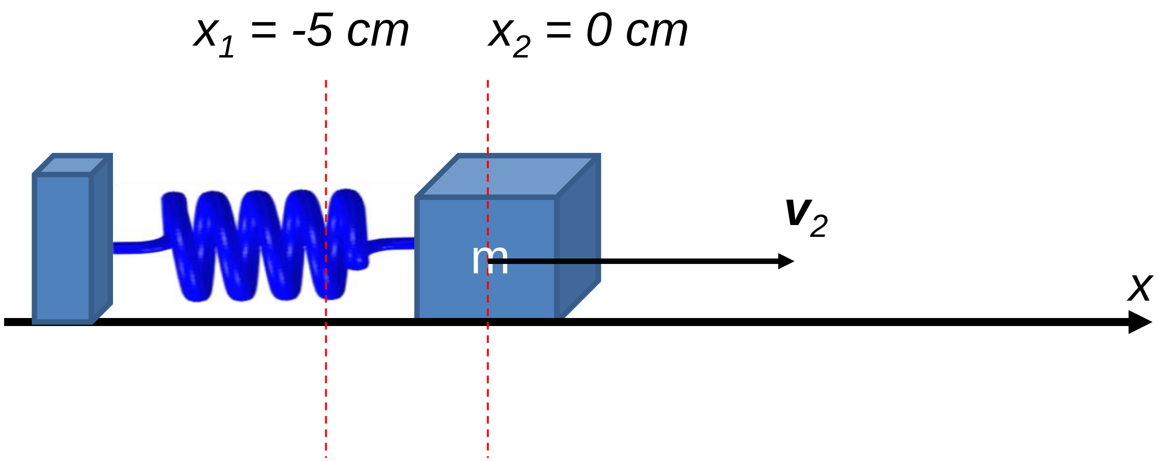
TIPLER, P. A. & MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros. Vol. 1. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2012., 759 pp.

Solução. Inicialmente a mola está comprimida de 5 cm.

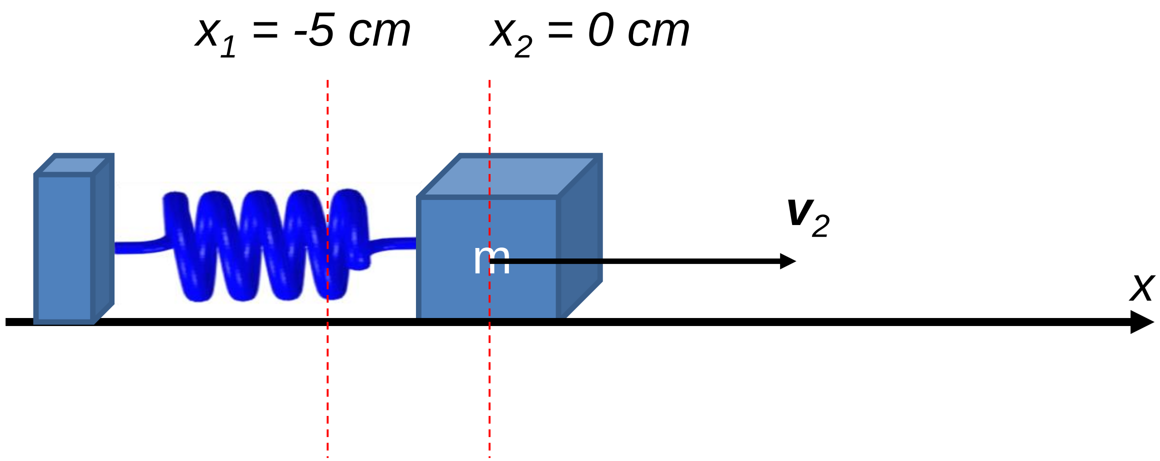
$x_1 = -5\ cm$



Solução. Depois desloca-se para a posição de equilíbrio em 0 cm.

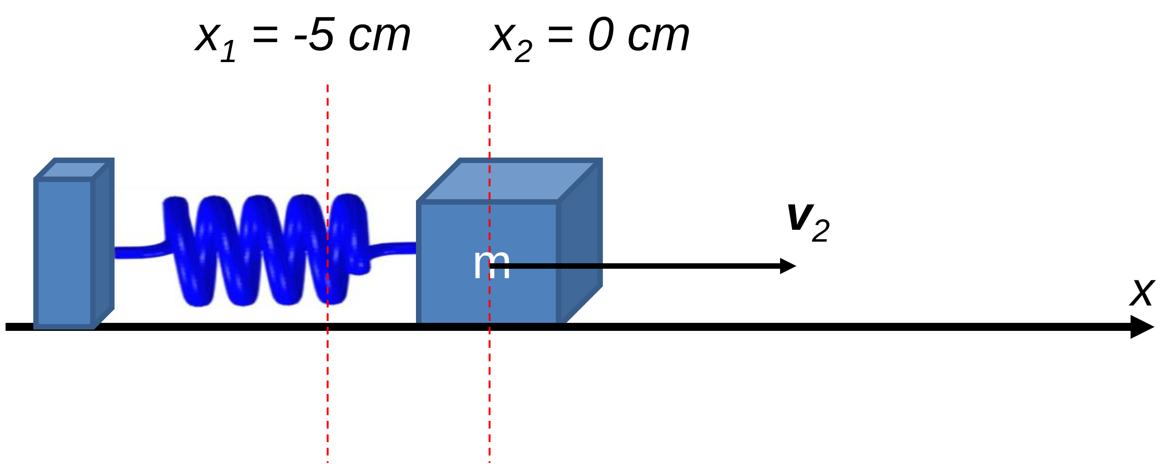


Solução. (a) O trabalho realizado sobre o bloco pela mola é a integral de $F_x dx$ de x_1 até x_2, como indicado abaixo.



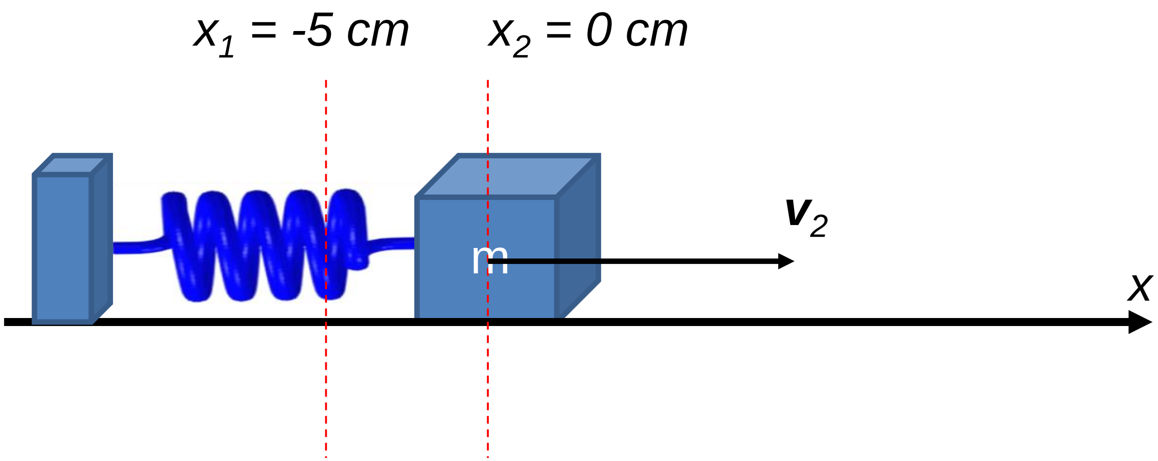
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = \left. \frac{-kx^2}{2} \right|_{x_1}^{x_2} = \frac{-kx_2^2}{2} - \frac{-kx_1^2}{2} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} =$$

Solução. (a) Substituindo-se os valores numéricos, temos:



$$W = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2) = \frac{400}{2}(0{,}05^2 - 0^2) = 200.(0{,}0025) \boxed{= 0{,}5 \text{ J}}$$

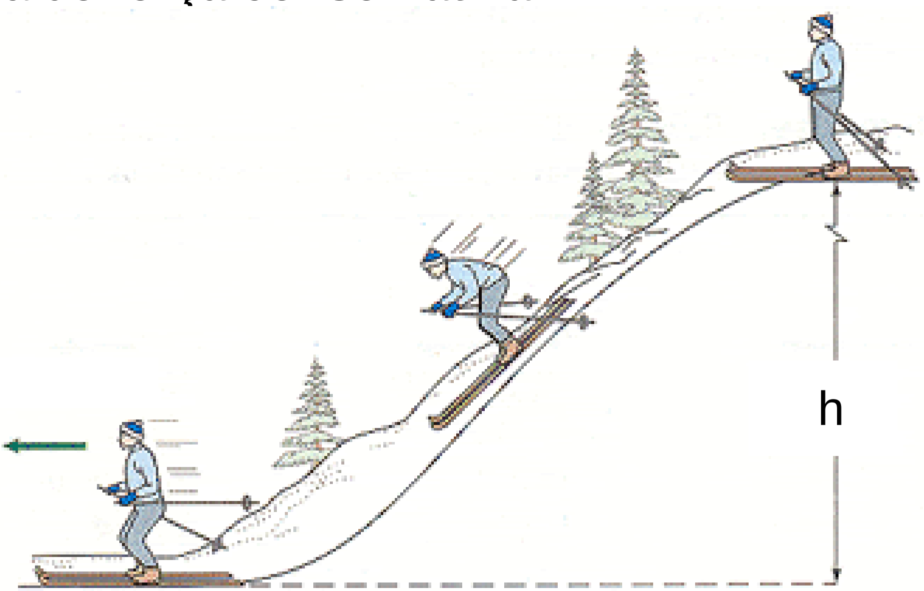
Solução. (b) Aplicando-se o teorema do trabalho-energia cinética, temos:



$$W_{total} = m\frac{v_2^2}{2} - m\frac{v_1^2}{2} \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + \frac{2W_{total}}{m} = 0 + \frac{2.0,5}{4} = 0,25 \Rightarrow v_2^2 = 0,25$$

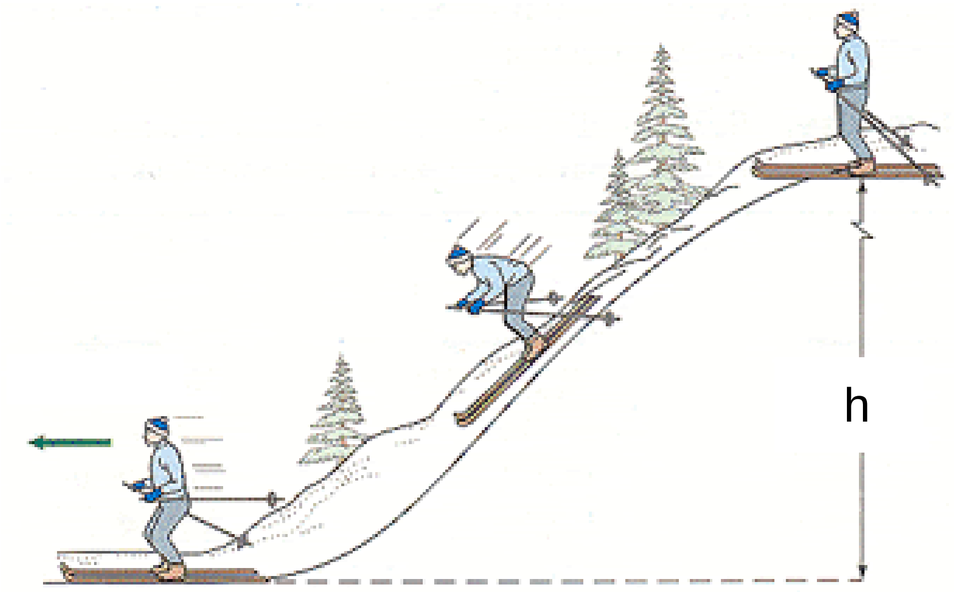
$$\Rightarrow \boxed{v_2 = 0,5\ m/s}$$

Considere um teleférico que sobe uma montanha de altura h. Um esquiador sai da altura zero e é levado até o topo da montanha pelo teleférico. No percurso de subida, o trabalho realizado sobre o esquiador pela força gravitacional é –mgh, onde m é a massa do esquiador. Vamos supor que o esquiador retornou à base da montanha (altura h = 0) esquiando, o trabalho realizado pela força gravitacional é +mgh. O trabalho total realizado sobre o esquiador pela força gravitacional é zero, independente da trajetória. Nesta situação, onde o trabalho total realizado depende apenas das posições inicial e final do corpo, e não do caminho percorrido, a força que realiza trabalho é chamada de **força conservativa**.



TIPLER, P. A. & MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros. Vol. 1. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2012., 759 pp.

Uma força é conservativa se o trabalho que ela realiza sobre uma partícula é zero quando a partícula percorre qualquer caminho fechado, retornando à sua posição inicial.

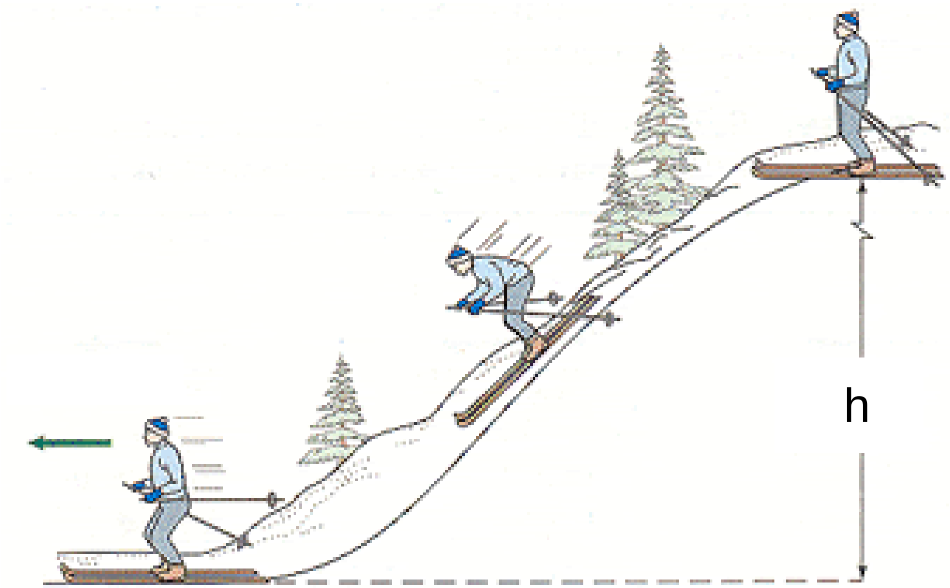


TIPLER, P. A. & MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros. Vol. 1. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2012., 759 pp.

Considere um deslocamento de um bloco sobre uma superfície com atrito, do ponto A até o ponto B em linha reta. Depois o bloco é empurrado de volta do ponto B para o ponto A. O atrito se opõe ao movimento, assim a força aplicada para o deslocamento do corpo é positiva em ambos os trechos, de forma que o trabalho total realizado pela força que empurra o bloco não é nulo. Esta força é dita **não-conservativa**.

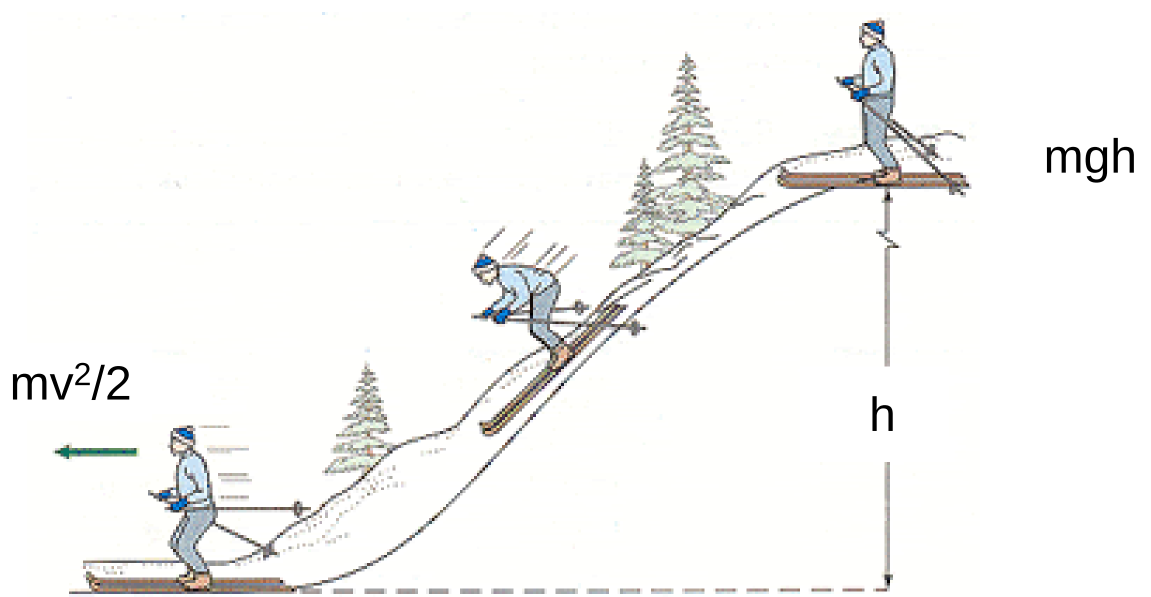
TIPLER, P. A. & MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros. Vol. 1. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2012., 759 pp.

Iremos considerar o mesmo exemplo do esquiador que sobe a montanha de teleférico e desce esquiando. Analisaremos este sistema para introduzirmos o conceito de **função energia potencial** (U) associada a uma força conservativa.



TIPLER, P. A. & MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros. Vol. 1. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2012., 759 pp.

Considere o sistema esquiador-Terra como um sistema de duas partículas. Quando o teleférico leva o esquiador para o topo da montanha, ele realiza trabalho sobre o sistema, +mgh. Este trabalho é armazenado na forma de **energia potencial gravitacional** do sistema esquiador-Terra. Quando o esquiador desce a montanha esquiando, esta energia potencial (mgh) é transformada em energia cinética ($mv^2/2$). Note que na descida o trabalho realizado pela força gravitacional diminui a energia potencial do sistema.



TIPLER, P. A. & MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros. Vol. 1. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2012., 759 pp.

Definimos a **função energia potencial** (U) de forma que o trabalho realizado por uma força conservativa é igual à diminuição da função energia potencial (-ΔU), como segue:

$$W = \int_1^2 \vec{F}.d\vec{l} = -\Delta U$$

De forma alternativa, temos:

$$\boxed{\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{F}.d\vec{l}}$$

Esta equação fornece a variação da energia potencial devida a uma variação da configuração do sistema quando um corpo se move do ponto 1 para um ponto 2.

Para um deslocamento infinitesimal d$\vec{l}$, a variação da energia potencial (dU) é dada por:

$$\mathrm{dU} = \vec{F}.d\vec{l}$$

Considerando um deslocamento infinitesimal d$\vec{l}$, vimos que a variação da energia potencial (dU) é dada por:

$$\mathrm{dU} = \vec{F}.d\vec{l}$$

Podemos calcular a energia potencial associada à força gravitacional próximos à superfície da Terra. Para a força $\vec{F} = -mg\hat{\jmath}$, temos:

$$\mathrm{d}U = -\vec{F}.d\vec{l} = -(-mg\hat{\jmath}).\left(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}\right) = mghdy$$

onde usamos: $\hat{\jmath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}\hat{k} = 0$ e $\hat{\jmath}.\hat{\jmath} = 1$

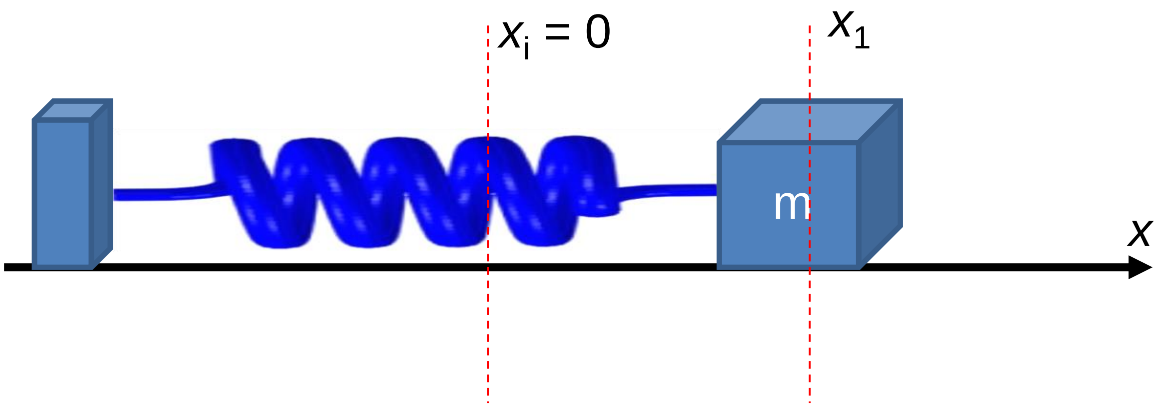
Integrando, obtemos:

$$U = \int mgdy = mgy + U_0$$

$$\boxed{U = U_0 + mgy}$$

onde U_0, a constante de integração arbitrária, é o valor da energia potencial em y = 0.

Podemos calcular a energia potencial elástica associada à força exercida pela mola.

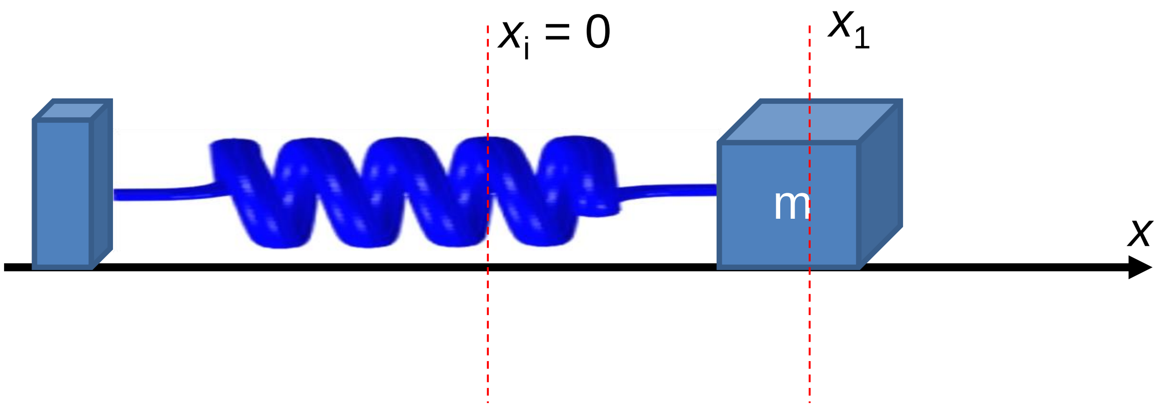


Para a força $\vec{F} = -kx\hat{\imath}$, temos:

$$\mathrm{d}U = -\vec{F}.d\vec{l} = -(-kx\hat{\imath}).\left(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}\right) = kxdx$$

onde usamos: $\hat{\imath}.\hat{\jmath} = \hat{\imath}\hat{k} = 0$ e $\hat{\imath}.\hat{\imath} = 1$

Podemos calcular a energia potencial elástica associada à força exercida pela mola.



Integrando, obtemos:

$$U = \int kx dx = \frac{1}{2}kx^2 + U_0$$

$$\boxed{U = U_0 + \frac{1}{2}kx^2}$$

onde U_0, a constante de integração arbitrária, é o valor da energia potencial em x = 0.

O trabalho total (W_{total}) realizado por todas as forças que atuam sobre um sistema é igual ao trabalho realizado por todas as forças externas (W_{ext}), mais o trabalho realizado por todas as forças internas não-conservativa (W_{nc}), mais aquele realizado por todas as forças conservativas (W_c),

$$W_{total} = W_{ext} + W_{nc} + W_c$$

Rearranjando-se os termos, temos:

$$W_{ext} + W_{nc} = W_{total} - W_c$$

W_c é a variação da energia potencial do sistema (ΔU_{sis}), assim temos:

$$W_{ext} + W_{nc} = W_{total} + \Delta U_{sis}$$

Sabemos que: $W_{total} = \Delta K_{sis}$, o que leva à seguinte expressão:

$$W_{ext} + W_{nc} = \Delta K_{sis} + \Delta U_{sis} = \Delta\,(K_{sis} + U_{sis})$$

A soma da energia cinética do sistema (K_{sis}) com a energia potencial do sistema (U_{sis}) é a **energia mecânica total do sistema (E_{mec})**,

$$E_{mec} = K_{sis} + U_{sis}$$

Assim:

$$W_{ext} + W_{nc} = \Delta K_{sis} + \Delta U_{sis} = \Delta E_{mec}$$

$$\boxed{W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}}$$ (Teorema do Trabalho-Energia para Sistemas)

A energia mecânica de um sistema é conservada se o trabalho total realizado por todas as forças externas e por todas as forças internas não conservativas é zero.

$$\Delta E_{mec} = 0$$

$$\boxed{E_{mec} = K_{sis} + U_{sis} = \text{constante}}$$

Se $E_{mec\ i}$ é a energia mecânica inicial do sistema e $E_{mec\ f}$ é a energia mecânica final do sistema, temos:

$$E_{mec\ i} = E_{mec\ f}$$

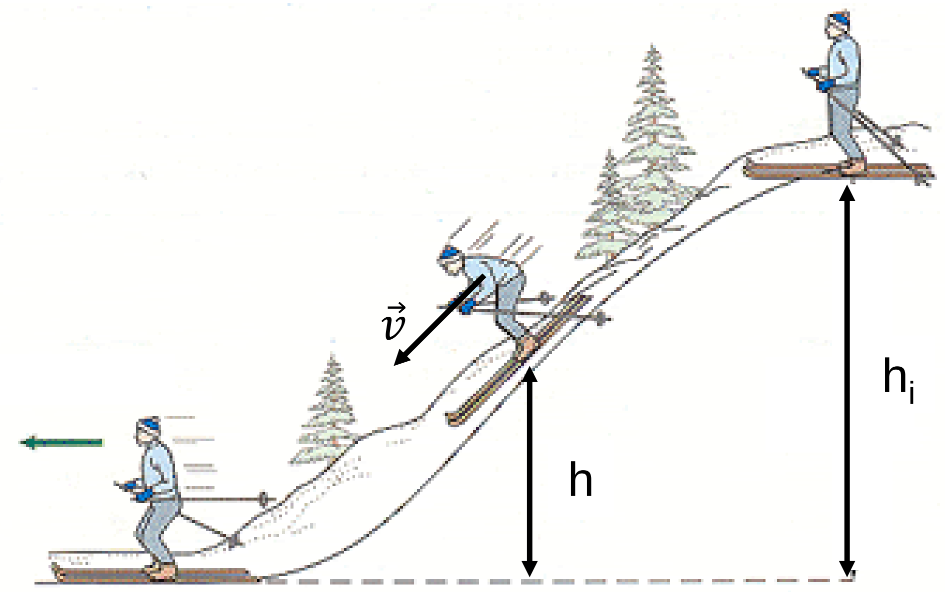
$$E_{mec\ i} = K_{sis\ i} + U_{sis\ i} = E_{mec\ f} = K_{sis\ f} + U_{sis\ f}$$

ou seja

$$\boxed{K_{sis\ i} + U_{sis\ i} = K_{sis\ f} + U_{sis\ f}}$$

A aplicação da conservação da energia mecânica nos permite resolver problemas que seriam de difícil resolução por meio da aplicação direta das leia de Newton.

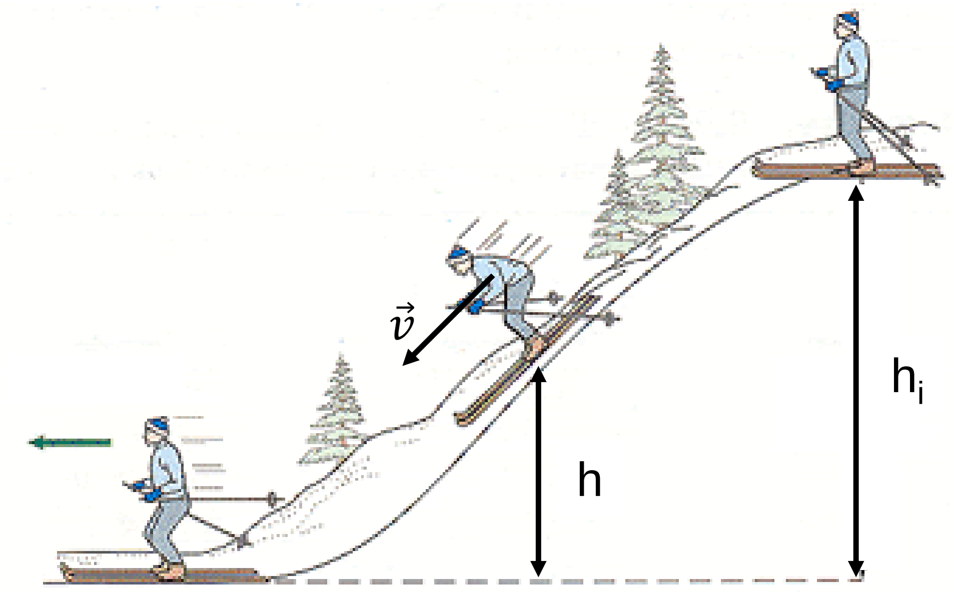
Exemplo 2. Considere um esquiador como velocidade inicial zero e altura inicial h_i, como indicado na figura abaixo. Considere o atrito desprezível e a resistência do ar nula. Determine a velocidade (v) quando o esquiador estiver a uma altura h, abaixo da altura inicial (h_i).



TIPLER, P. A. & MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros. Vol. 1. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2012., 759 pp.

Solução: A energia mecânica do sistema esquiador-Terra é conservada, visto que a única força que atua no sistema é a força gravitacional que é conservativa. Se escolhermos U = 0 na base da montanha, a energia potencial no topo da montanha é mgh_i. Quando o esquiador atingir a altura h, sua energia potencial será mgh e terá energia cinética $(1/2)mv^2$, a partir da conservação da energia mecânica temos:

$$E_{mec\ i} = E_{mec\ f}$$
$$mgh_i = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$



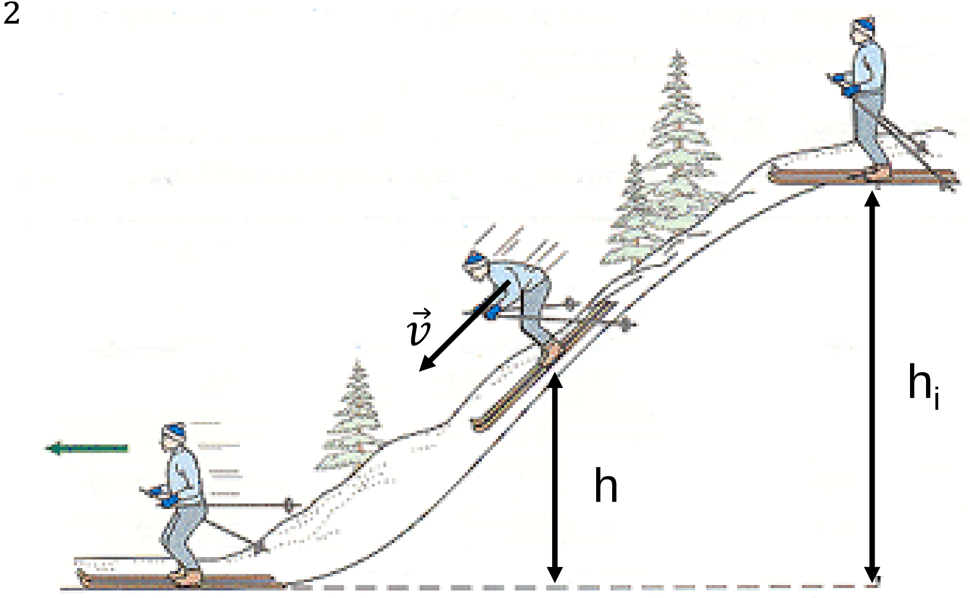
TIPLER, P. A. & MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros. Vol. 1. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2012., 759 pp.

Solução: A energia mecânica do sistema esquiador-Terra é conservada, visto que a única força que atua no sistema é a força gravitacional que é conservativa. Se escolhermos U = 0 na base da montanha, a energia potencial no topo da montanha é mgh_i. Quando o esquiador atingir a altura h, sua energia potencial será mgh e terá energia cinética $(1/2)mv^2$, a partir da conservação da energia mecânica temos:

$$E_{mec\ i} = E_{mec\ f}$$

$$\cancel{m}gh_i = \cancel{m}gh + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$gh_i = gh + \frac{1}{2}v^2$$



TIPLER, P. A. & MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros. Vol. 1. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2012., 759 pp.

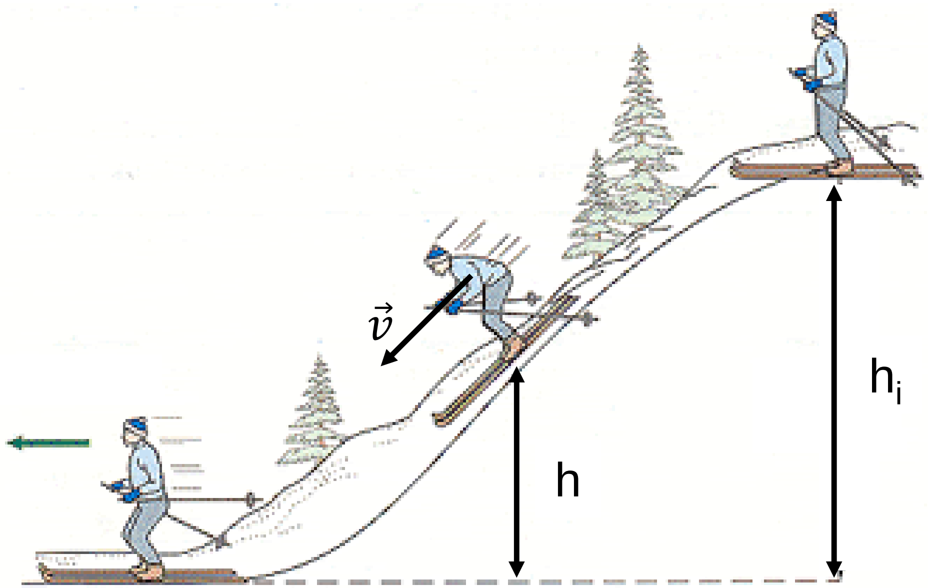
Solução: Isolando-se a velocidade (v), temos:

$$gh_i = gh + \frac{1}{2}v^2$$

$$\frac{1}{2}v^2 = gh_i - gh$$

$$v^2 = 2g(h_i - h)$$

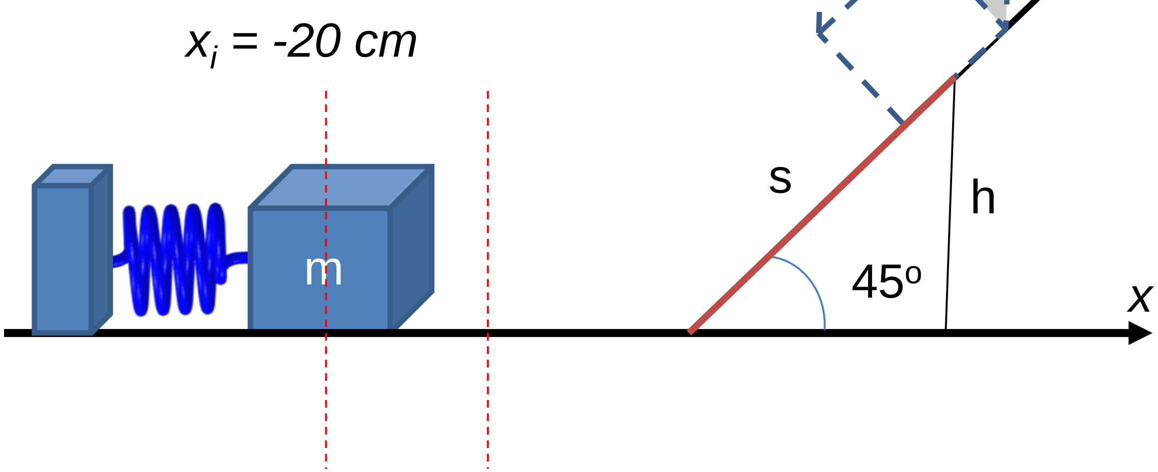
$$\boxed{\mathrm{v} = \sqrt{2g(h_i - h)}}$$



TIPLER, P. A. & MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros. Vol. 1. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2012., 759 pp.

Exemplo 3. Considere um bloco de 2,0 kg sobre uma superfície horizontal sem atrito que é empurrado contra uma mola com constante elástica de 500 N/m. A mola sofre uma compressão de 20 cm. O bloco é liberado. Depois, o bloco desliza ao longo de uma superfície e sobe um plano inclinado com um ângulo de 45^o com a horizontal. Qual a distância (s) que o bloco percorre rampa acima até atingir momentaneamente o repouso.

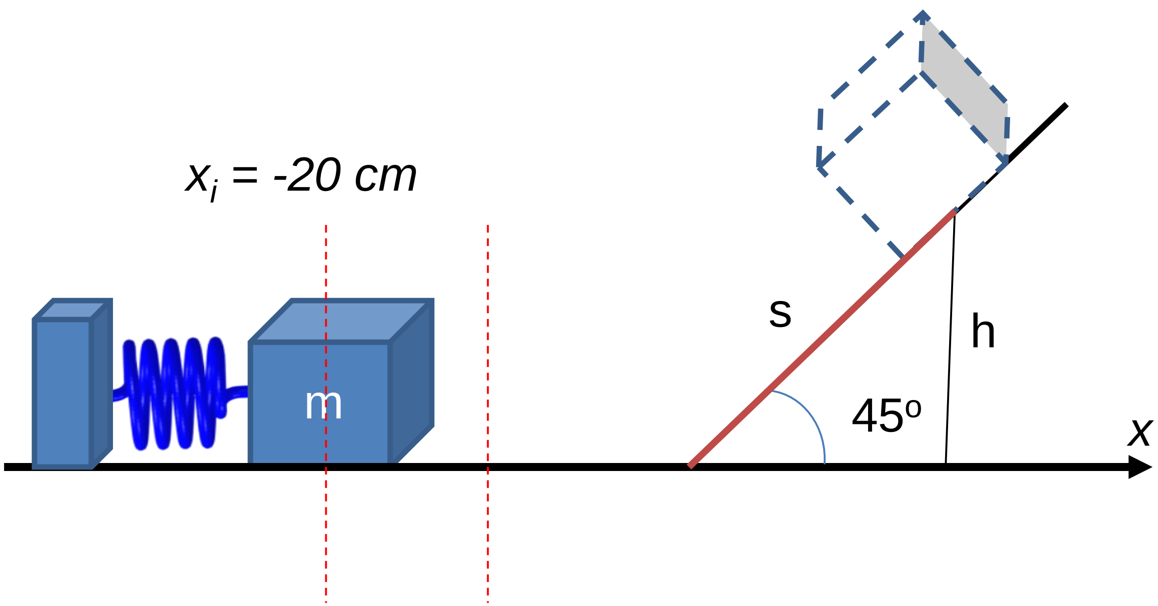
Solução: Abaixo temos o digrama esquemático do sistema.



Solução: Aplicando-se o teorema do trabalho-energia para o sistema, temos:

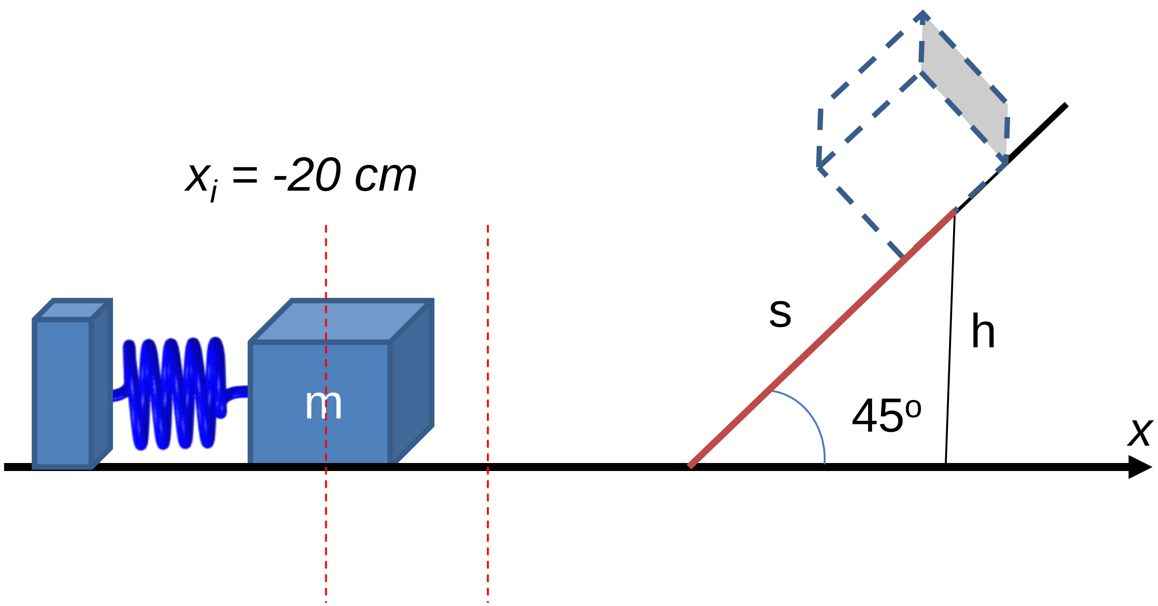
$$E_{mec\ i} = E_{mec\ f}$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgh$$



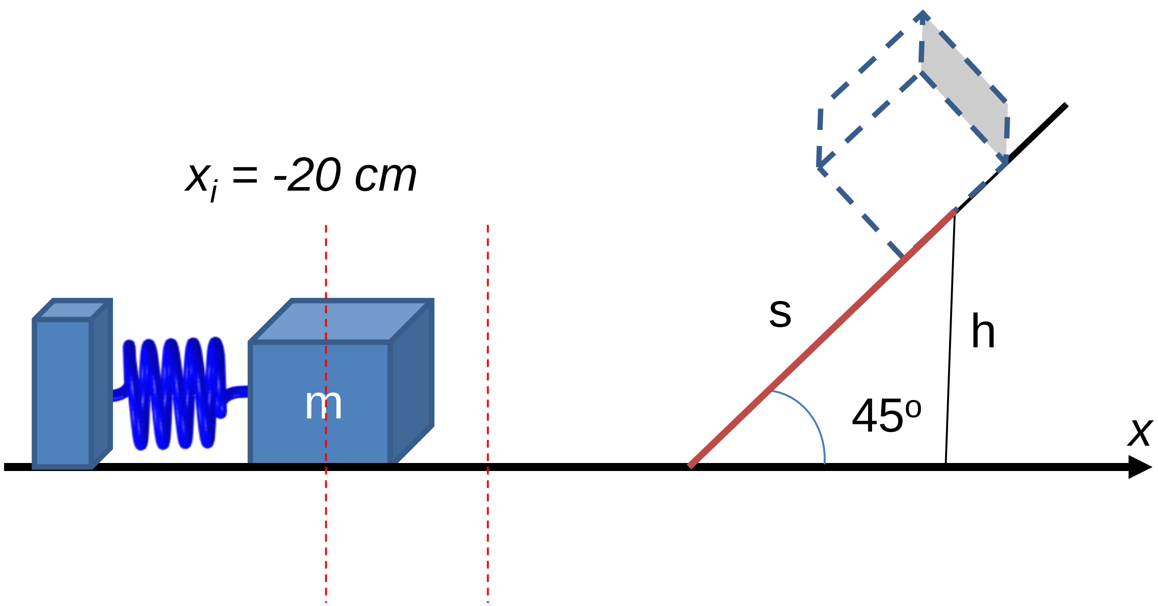
Solução: Isolando-se a altura, temos:

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{kx^2}{2mg}$$



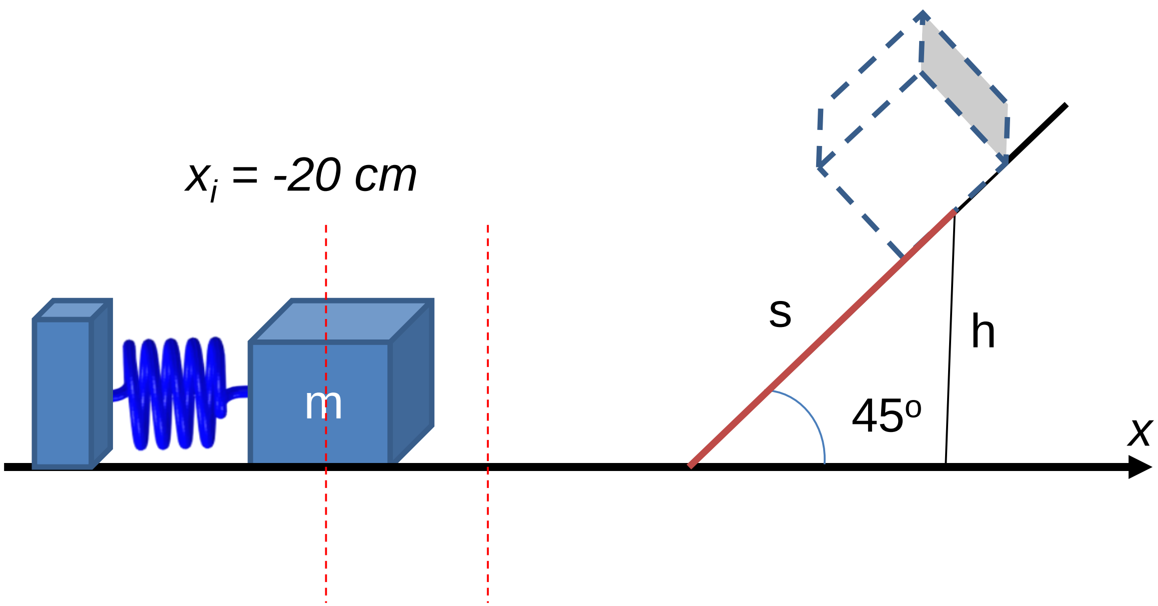
Solução: Isolando-se a altura, temos:

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{kx^2}{2mg} = \frac{500.(0,2)^2}{2.2.9,8} = \frac{20}{39,2} = 0,51m$$



Solução: Analisando-se a geometria do sistema, temos:

$$h = s.sen(45^o) \Rightarrow s = \frac{h}{sen(45^o)} = \frac{0{,}51m}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \boxed{0{,}72m}$$



TIPLER, P. A. & MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros. Vol. 1. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2012., 759 pp.

Última atualização em: Acesso em: 07 de maio de 2018.