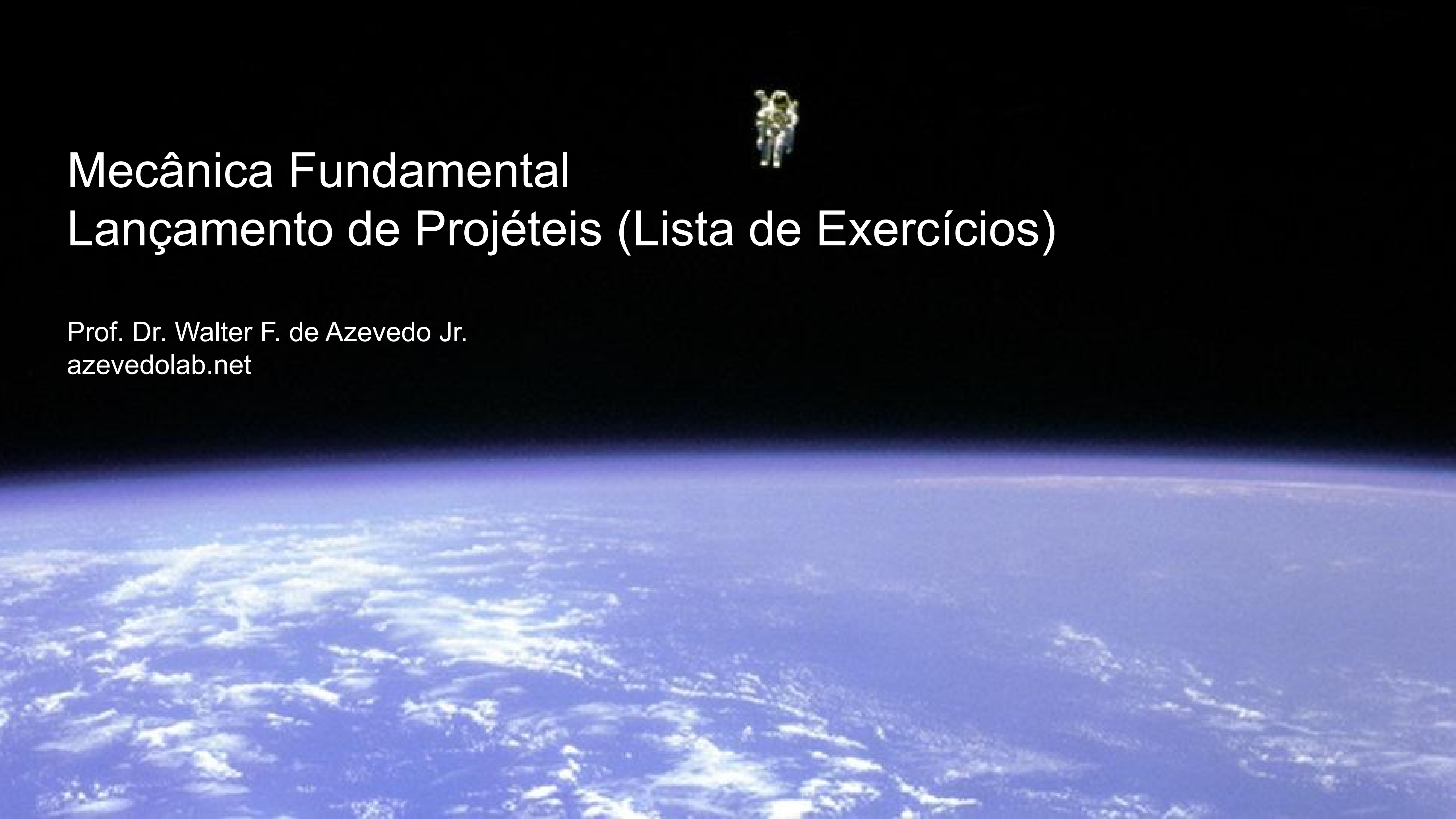
Mecânica Fundamental
Lançamento de Projéteis (Lista de Exercícios)

Prof. Dr. Walter F. de Azevedo Jr.
azevedolab.net



1) Considere que um jogador de baseball rebateu uma bola com velocidade inicial de 37 m/s e um ângulo de 53,1º. Calcular o alcance da bola, a altura máxima e a velocidade ao chegar ao solo.

Solução: $x_o = 0$ e $y_o = 0$

$$R = x_0 + \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 2gy_0}\right)$$

$$R = \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 0}\right)$$

$$R = \frac{v_0 cos\theta}{g}(v_0 sen\theta + v_0 sen\theta)$$

$$R = \frac{v_0^2 . 2. sen\theta. cos\theta}{g}$$

$$R = \frac{v_0^2 . sen(2\theta)}{g}$$

$$R = \frac{37^2 . sen(2.53{,}1^o)}{9{,}8} = \frac{1369. sen(106{,}2^o)}{9{,}8} = \frac{1369.0{,}96}{9{,}8}$$

$$\boxed{R = 134 \text{ m}}$$

Solução: $x_o = 0$ e $y_o = 0$

$$y_{max} = y_0 + \frac{v_0^2 . sen^2\theta}{2g}$$

$$y_{max} = 0 + \frac{37^2 . (sen53{,}1^0)^2}{2.9{,}8} = \frac{1369 . (0{,}7997)^2}{19{,}6}$$

$$\boxed{y_{max} = 44{,}67 \text{ m}}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 . g . y_0} = \sqrt{37^2 + 2.9{,}8.0}$$

$$\boxed{v = 37 \text{ m/s}}$$

2) Considere que uma bola foi lançada de uma altura de 8 m, com velocidade inicial de 10 m/s e com um ângulo de -20º com a horizontal, ou seja, a bola foi lançada para baixo. Calcular o alcance da bola e a velocidade ao chegar ao solo.

Solução: $x_o = 0$ e $y_o = 8$ m

$$R = x_0 + \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 2gy_0}\right)$$

$$R = 0 + \frac{10.\cos(-20^o)}{9{,}8}\left(10.sen(-20^o) + \sqrt{(10.sen(-20^o))^2 + 2.9{,}8.8}\right)$$

$$R = \frac{10.0{,}93969}{9{,}8}\left(10.(-0{,}342) + \sqrt{(10.(-0{,}342))^2 + 156{,}8}\right)$$

$$R = \frac{9{,}3969}{9{,}8}\left(-3{,}42 + \sqrt{(-3{,}42)^2 + 156{,}8}\right) = 0{,}95887\left(-3{,}42 + \sqrt{11{,}6964 + 156{,}8}\right) = 0{,}95887(-3{,}42 + 12{,}981)$$

$$\boxed{R = 9{,}17 \text{ m}}$$

Solução: $x_o = 0$ e $y_o = 8$ m

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2.g.y_0} = \sqrt{10^2 + 2.9{,}8.8} = \sqrt{100 + 156{,}8} = \sqrt{256{,}8}$$

$$\boxed{v = 16 \text{ m/s}}$$

3) Uma bola é arremessada para cima a partir do terraço de um prédio com um ângulo de 30º e com velocidade inicial de 30 m/s. O arremesso é feito a partir de uma altura de 45 m do solo. Calcular o alcance da bola, a altura máxima e a velocidade ao chegar ao solo.

Solução: x_o = 0 e y_o = 45 m

$$R = x_0 + \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 2gy_0}\right)$$

$$R = 0 + \frac{30.\cos(30^o)}{9,8}\left(30.\,sen(30^o) + \sqrt{(30.\,sen(30^o))^2 + 2.9,8.45}\right)$$

$$R = \frac{30.0,866}{9,8}\left(30.0,5 + \sqrt{(30.0,5)^2 + 882}\right)$$

$$R = \frac{25,98}{9,8}\left(15 + \sqrt{(15)^2 + 882}\right) = 2,651\left(15 + \sqrt{225 + 882}\right) = 2,651(15 + 33,2716)$$

$$\boxed{R = 127,97\ \text{m}}$$

Solução: $x_o = 0$ e $y_o = 45$ m

$$y_{max} = y_0 + \frac{v_0^2 . sen^2\theta}{2g}$$

$$y_{max} = 45 + \frac{30^2 . (sen30^0)^2}{2.9,8} = 45 + \frac{900. (0,5)^2}{19,6}$$

$$\boxed{y_{max} = 56,48 \text{ m}}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2. g. y_0} = \sqrt{30^2 + 2.9,8.45} = \sqrt{900 + 882}$$

$$\boxed{v = 42,2 \text{ m/s}}$$

4) Um saltador em distância sai do solo a um ângulo de 20,0º com a horizontal e com velocidade de 11,0 m/s. (a) Que distância ele salta ao longo da horizontal? (b) Qual a altura máxima alcançada.

Solução: $x_o = 0$ e $y_o = 0$

$$R = x_0 + \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 2gy_0}\right)$$

$$R = \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 0}\right)$$

$$R = \frac{v_0 cos\theta}{g}(v_0 sen\theta + v_0 sen\theta)$$

$$R = \frac{v_0^2 . 2. sen\theta . cos\theta}{g}$$

$$R = \frac{v_0^2 . sen(2\theta)}{g}$$

$$R = \frac{11^2 . sen(2.20^o)}{9{,}8} = \frac{121. sen(40^o)}{9{,}8} = \frac{121.0{,}6428}{9{,}8}$$

$$\boxed{R = 7{,}94 \text{ m}}$$

Solução: $x_o = 0$ e $y_o = 0$

$$y_{max} = y_0 + \frac{v_0^2 . sen^2\theta}{2g}$$

$$y_{max} = 0 + \frac{11^2 . (sen20^0)^2}{2.9,8} = \frac{121 . (0,342)^2}{19,6}$$

$$\boxed{y_{max} = 0,722 \text{ m}}$$

5) Um projétil é lançado de tal modo que seu alcance horizontal é três vezes sua altura máxima. Qual é o ângulo de lançamento?

Solução: $x_o = 0$ e $y_o = 0$

$$R = x_0 + \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 2gy_0}\right)$$

$$R = \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 0}\right)$$

$$R = \frac{v_0 cos\theta}{g}(v_0 sen\theta + v_0 sen\theta) = \frac{v_0^2 .2. sen\theta. cos\theta}{g}$$

Considerando-se a altura máxima, temos:

$$y_{max} = y_0 + \frac{v_0^2 . sen^2\theta}{2g} = \frac{v_0^2 . sen^2\theta}{2g}$$

Sabemos que: $R = 3.y_{max}$, assim temos:

$$\frac{v_0^2 .2. sen\theta. cos\theta}{g} = 3\frac{v_0^2 . sen^2\theta}{2g} \rightarrow \frac{2. cos\theta}{3} = \frac{sen\theta}{2} \rightarrow \frac{2.2}{3} = \frac{sen\theta}{cos\theta}$$

$$\frac{sen\theta}{cos\theta} = \frac{4}{3} \rightarrow tg\theta = 1{,}333 \rightarrow \boxed{\theta = 53{,}1^o}$$

6) A velocidade de um projétil quando ele atinge sua altura máxima é metade de sua velocidade de quando ele atinge à metade de sua altura máxima. Qual é o ângulo de projeção inicial do projétil?

Solução: $x_o = 0$ e $y_o = 0$. Vamos considerar a altura máxima (y_{max})

$y_{max} = y_0 + \frac{v_0^2.sen^2\theta}{2g} = \frac{v_0^2.sen^2\theta}{2g} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$. Para metade da altura, temos $y = \frac{y_{max}}{2} = \frac{v_{0y}^2}{4g}$

Aplicando a equação de Torricelli quando a altura é metade da altura máxima, temos:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y = v_{0y}^2 - 2g\frac{v_{0y}^2}{4g} = v_{0y}^2 - \frac{v_{0y}^2}{2} = \frac{v_{0y}^2}{2} \rightarrow v_y^2 = \frac{v_{0y}^2}{2}$$

A velocidade (v) quando a altura é metade de y_{max} é dada por: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_x^2 + \frac{v_{0y}^2}{2}}$

Agora consideramos a situação do problema, onde v' é a velocidade quando a altura $y = y_{max}$.

$$v' = \frac{1}{2}v \rightarrow v_x = \frac{1}{2}\sqrt{v_x^2 + \frac{v_{0y}^2}{2}} \rightarrow 2v_x = \sqrt{v_x^2 + \frac{v_{0y}^2}{2}} \rightarrow 4v_x^2 = v_x^2 + \frac{v_{0y}^2}{2} \rightarrow 3v_x^2 = \frac{v_{0y}^2}{2} \rightarrow 6v_x^2 = v_{0y}^2 \rightarrow \sqrt{6}v_x = v_{0y}$$

Assim temos: $\sqrt{6}v_0 cos\theta = v_0 sen\theta \rightarrow \sqrt{6} = \frac{sen\theta}{cos\theta} \rightarrow tg\theta = \sqrt{6} \rightarrow \boxed{\theta = 67{,}8^o}$

7) Determine o ângulo de lançamento de um projétil para que seu alcance seja o máximo possível.

Solução: $x_o = 0$ e $y_o = 0$

$$R = x_0 + \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 2gy_0}\right)$$

$$R = \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 0}\right)$$

$$R = \frac{v_0 cos\theta}{g}(v_0 sen\theta + v_0 sen\theta) = \frac{v_0^2 .2. sen\theta . cos\theta}{g} \rightarrow \boxed{R = \frac{v_0^2 . sen2\theta}{g}}$$

A partir da condição de máximo (ou mínimo) temos:

$$\frac{dR}{d\theta} = 0 \rightarrow \frac{dR}{d\theta} = \frac{v_0^2 .2. cos2\theta}{g} = 0 \rightarrow cos2\theta = 0 \rightarrow 2\theta = 90^o \rightarrow \boxed{\theta = 45^o}$$

8) Um projétil é lançado de tal modo que seu alcance horizontal é duas vezes sua altura máxima. Qual é o ângulo de lançamento?

Solução: $x_o = 0$ e $y_o = 0$

$$R = x_0 + \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 2gy_0}\right)$$

$$R = \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 0}\right)$$

$$R = \frac{v_0 cos\theta}{g}(v_0 sen\theta + v_0 sen\theta) = \frac{v_0^2.2.sen\theta.cos\theta}{g}$$

Considerando-se a altura máxima, temos:

$$y_{max} = y_0 + \frac{v_0^2.sen^2\theta}{2g} = \frac{v_0^2.sen^2\theta}{2g}$$

Sabemos que: $R = 2.y_{max}$, assim temos:

$$\frac{v_0^2.2.sen\theta.cos\theta}{g} = 2\frac{v_0^2.sen^2\theta}{2g} \rightarrow 2.cos\theta = sen\theta$$

$$\frac{sen\theta}{cos\theta} = 2 \rightarrow tg\theta = 2 \rightarrow \boxed{\theta = 63{,}4^o}$$

9) Um projétil é lançado de tal modo que seu alcance horizontal é igual a altura máxima. Qual é o ângulo de lançamento?

Solução: $x_o = 0$ e $y_o = 0$

$$R = x_0 + \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 2gy_0}\right)$$

$$R = \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 0}\right)$$

$$R = \frac{v_0 cos\theta}{g}(v_0 sen\theta + v_0 sen\theta) = \frac{v_0^2 .2. sen\theta . cos\theta}{g}$$

Considerando-se a altura máxima, temos:

$$y_{max} = y_0 + \frac{v_0^2 . sen^2\theta}{2g} = \frac{v_0^2 . sen^2\theta}{2g}$$

Sabemos que: R = y_{max}, assim temos:

$$\frac{v_0^2 .2. sen\theta . cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 . sen^2\theta}{2g} \rightarrow 2. cos\theta = \frac{sen\theta}{2}$$

$$\frac{sen\theta}{cos\theta} = 4 \rightarrow tg\theta = 4 \rightarrow \boxed{\theta = 76{,}0^o}$$

10) Um projétil é lançado de tal modo que seu alcance horizontal é quatro vezes sua altura máxima. Qual é o ângulo de lançamento?

Solução: $x_o = 0$ e $y_o = 0$

$$R = x_0 + \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 2gy_0}\right)$$

$$R = \frac{v_0 cos\theta}{g}\left(v_0 sen\theta + \sqrt{v_0^2 sen^2\theta + 0}\right)$$

$$R = \frac{v_0 cos\theta}{g}(v_0 sen\theta + v_0 sen\theta) = \frac{v_0^2 . 2. sen\theta . cos\theta}{g}$$

Considerando-se a altura máxima, temos:

$$y_{max} = y_0 + \frac{v_0^2 . sen^2\theta}{2g} = \frac{v_0^2 . sen^2\theta}{2g}$$

Sabemos que: $R = 4.y_{max}$, assim temos:

$$\frac{v_0^2 . 2. sen\theta . cos\theta}{g} = 4\frac{v_0^2 . sen^2\theta}{2g} \rightarrow 2. cos\theta = 2. sen\theta$$

$$\frac{sen\theta}{cos\theta} = 1 \rightarrow tg\theta = 1 \rightarrow \boxed{\theta = 45{,}0^o}$$