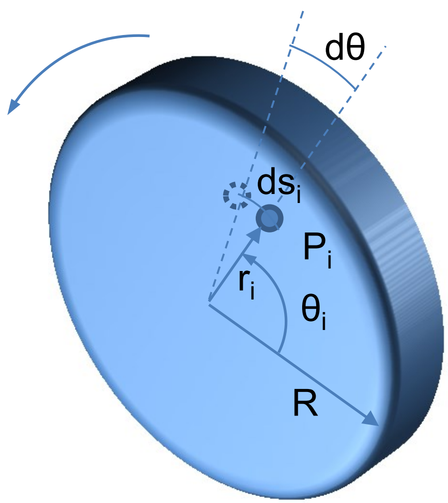
Movimento Circular Uniforme

Prof. Dr. Walter F. de Azevedo Jr. E-mail: walter@azevedolab.net

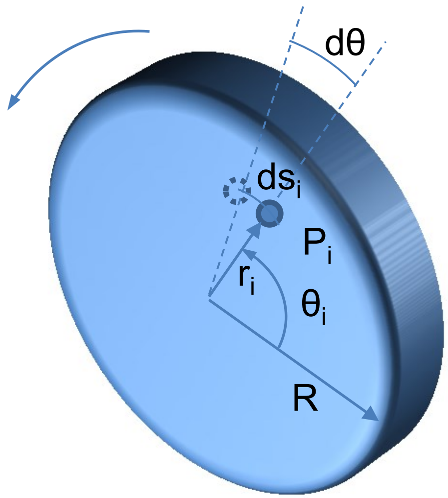
Considere um disco rígido de densidade constante e raio R mostrado na figura abaixo. O disco tem rotação em torno de um eixo que passa pelo seu centro. No disco temos uma partícula infinitesimal P_i de massa dm_i que gira no sentido anti-horário com deslocamento ds_i.



Num intervalo de tempo dt, a partícula P_i descoloca-se ds_i, que é dado por:

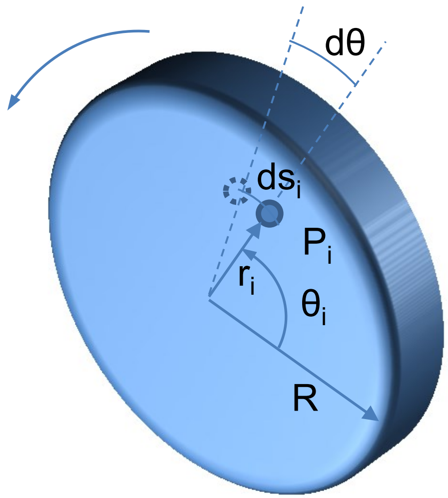
$$ds_i = v_i dt$$

onde v_i é a velocidade da partícula P_i



A partícula P_i varre um ângulo dθ no intervalo de tempo dt. Em radianos (rad) temos que dθ é dado pela seguinte expressão:

$$\boxed{d\theta = \frac{ds_i}{r_i}}$$

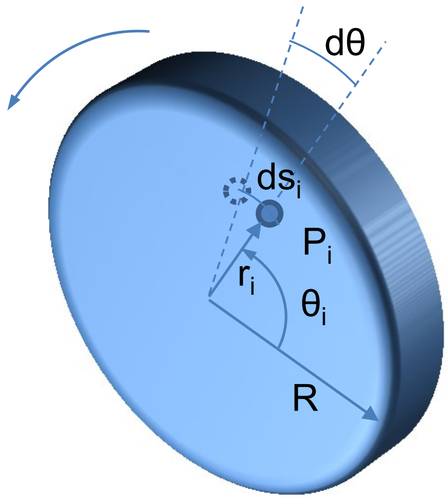


onde r_i é o raio da partícula. O ângulo θ é chamado de **deslocamento angular**.

Considerando-se uma volta completa do disco, temos que a partícula P_i sofre um deslocamento Δs_i de $2\pi r_i$, sendo 2π o deslocamento angular ($\Delta\theta$), assim temos:

$$\boxed{\Delta\theta = \frac{\Delta s_i}{r_i} = \frac{2\pi r_i}{r_i} = 2\pi rad = 360^o = 1\,rev}$$

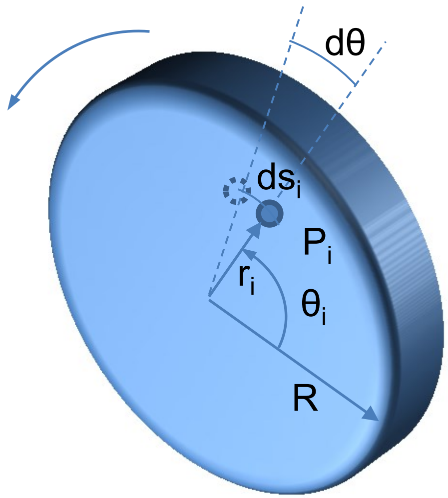
onde 1 rev é uma revolução.



Definimos a **velocidade angular** (ω) como a taxa de variação do deslocamento angular (θ) com relação ao tempo, conforme indicado abaixo.

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

a velocidade angular tem unidade de rad/s e dimensões de T^{-1}.

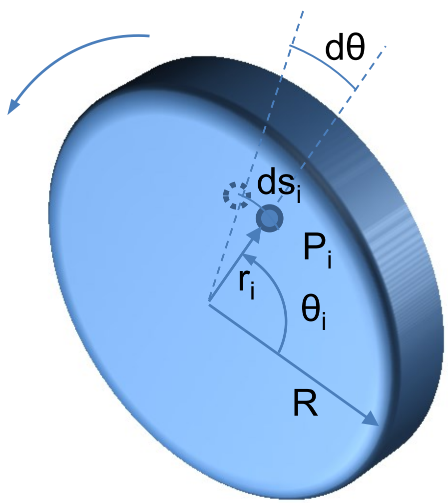


A velocidade angular é positiva para uma rotação anti-horária, onde o deslocamento angular (θ) aumenta, e negativa para uma rotação horária, onde θ diminui.

Definimos a **aceleração angular** (α) como a taxa de variação da velocidade angular (ω) com relação ao tempo, conforme indicado abaixo.

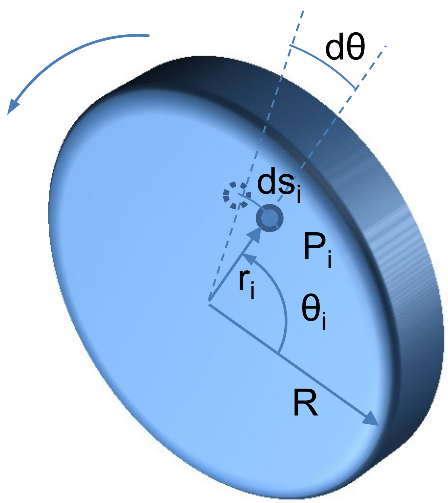
$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

a aceleração angular tem unidade de rad/s^2 e dimensões de T^{-2}.



A aceleração angular é positiva quando a velocidade angular estiver crescendo e negativa para uma diminuição da velocidade angular.

A partir das equações (1) e (2) abaixo, podemos relacionar a velocidade tangencial (v_{it}) da partícula P_i sobre o disco à velocidade angular (ω), como segue:



$$d\theta = \frac{ds_i}{r_i} \qquad \text{(Equação 1)}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{(Equação 2)}$$

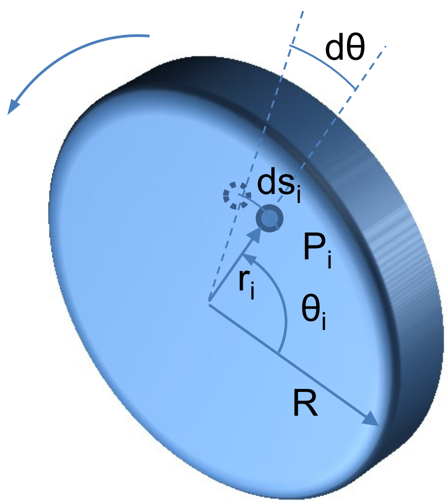
$$v_{it} = \frac{ds_i}{dt} = \frac{d(r_i\theta)}{dt} = r_i\frac{d\theta}{dt} = r_i\omega$$

$$\boxed{v_{it} = r_i\omega}$$

Podemos relacionar a aceleração tangencial (a_{it}) com a aceleração angular (α), como indicado abaixo:

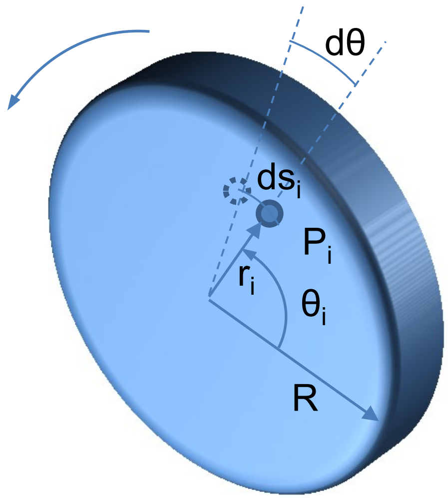
$$a_{it} = \frac{dv_{it}}{dt} = \frac{d(r_i\omega)}{dt} = r_i\frac{d\omega}{dt} = r_i\alpha$$

$$\boxed{a_{it} = r_i\alpha}$$



Para uma aceleração angular (α) constante, podemos obter as equações do movimento circular uniforme, a partir da integração, como indicado abaixo.

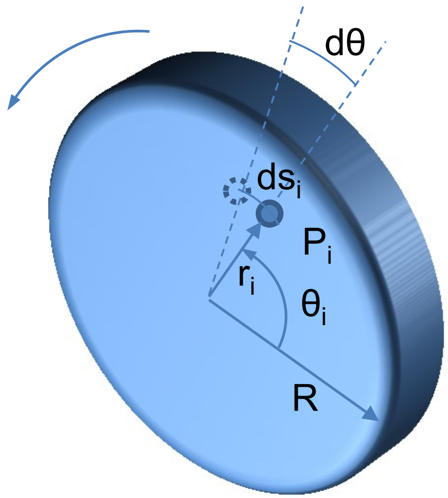
$$\boxed{\alpha = constante}$$



$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow d\omega = \alpha dt \rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha \int_0^t dt \rightarrow \omega - \omega_0 = \alpha t \rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t}$$

A partir da definição de velocidade angular, chegamos a uma equação para o deslocamento angular:

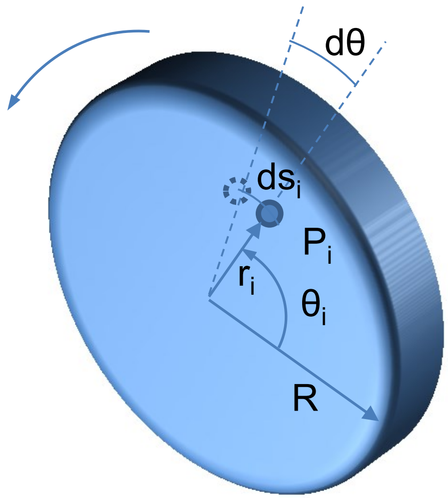
$$\omega = \omega_0 + \alpha t \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha t \rightarrow d\theta = (\omega_0 + \alpha t)dt \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \omega_0 \int_0^t dt + \alpha \int_0^t t dt$$



$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \rightarrow \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2}$$

Se isolarmos o tempo da equação da velocidade angular e substituirmos na equação do deslocamento angular, temos uma expressão equivalente à equação de Torricelli.

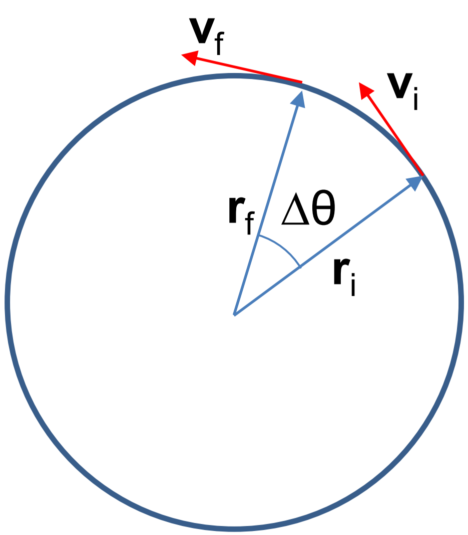
$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta}$$



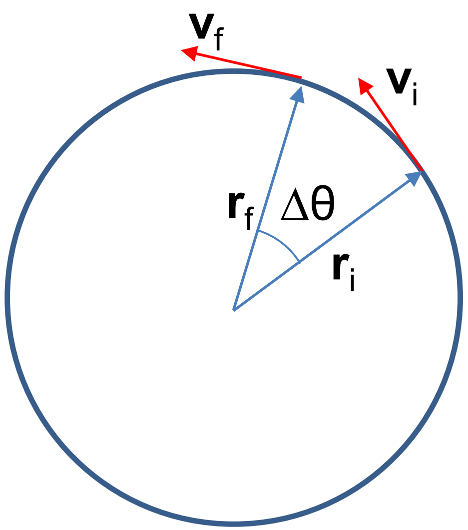
Temos o equivalente para cada aspecto do movimento unidimensional no movimento circular uniforme, como indicado abaixo.

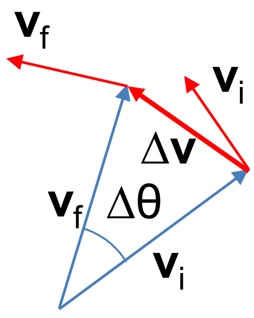
Movimento Circular Uniforme		**Movimento Unidimensional**	
deslocamento angular (θ)		posição (s)	
velocidade angular (ω)	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	velocidade (v)	$v = \frac{ds}{dt}$
aceleração angular (α)	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	aceleração (a)	$a = \frac{dv}{dt}$
equação para deslocamento angular	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$	equação para posição	$s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$
equação para velocidade angular	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	equação para velocidade	$v = v_0 + at$
equação para velocidade angular	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$	equação para velocidade	$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$

Sobre a aceleração centrípeta, podemos obter sua expressão a partir da análise vetorial do movimento circular uniforme, como mostrado no desenho abaixo. No sistema abaixo, temos uma partícula em movimento circular, onde esta desloca-se da posição inicial (**r**$_i$) para final (**r**$_f$), com deslocamento angular $\Delta\theta$.

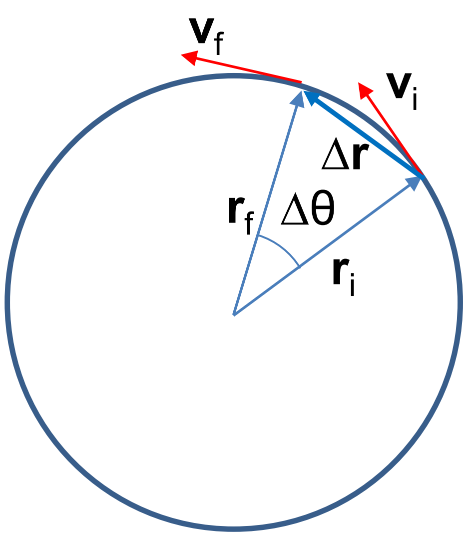


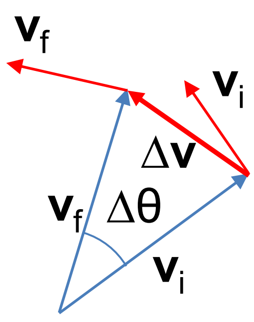
Analisando-se variação da velocidade tangencial entre os instantes inicial e final, temos a variação da velocidade ($\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i$) indicada na figura abaixo à direita.





Considerando-se a variação da posição (**r**) entre os instantes finais e iniciais, temos o vetor resultante ($\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r_f} - \mathbf{r}_i$), como indicado abaixo.

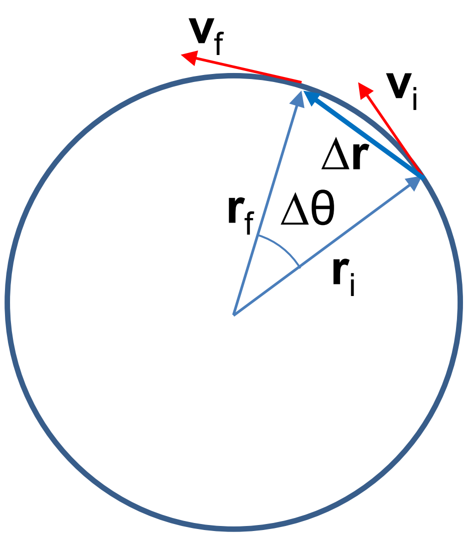


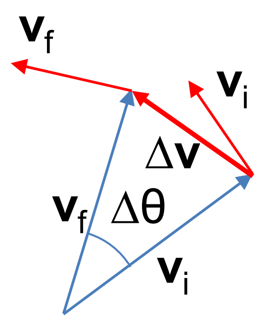


Movimento Circular Uniforme (Aceleração Centrípeta)

Analisando-se a geometria do sistema, vemos que os triângulos da esquerda e direita são semelhantes. Assim, considerando-se que $r_i = r_f = r$ e que $v_i = v_f = v$ temos:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r} \rightarrow |\Delta\vec{v}| = \mathrm{v}\frac{|\Delta\vec{r}|}{r} \quad (1)$$





Sabemos que a aceleração é dada por:

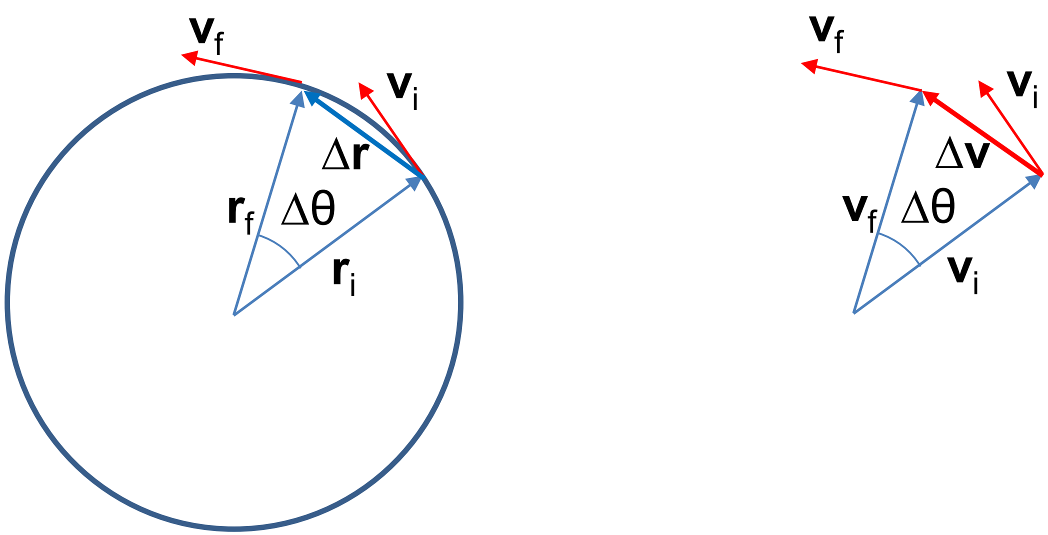
$$|\vec{a}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \quad (2)$$

Substituindo-se (1) em (2) temos:

$$|\vec{a}| = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v}{r}v = \frac{v^2}{r} \rightarrow \boxed{a_c = \frac{v^2}{r}}$$

O tempo que uma partícula em movimento circular uniforme demora para realizar uma volta completa (360°) é chamado de período (T) e é dado pela expressão abaixo:

$$\boxed{T = \frac{2\pi r}{v}}$$



Considerando-se que v = ωr, temos:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \rightarrow T = \frac{2\pi r}{\omega r} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

TIPLER, P. A. & MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros. Vol. 1. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2012., 759 pp.

Última atualização em: 6 de setembro de 2018.