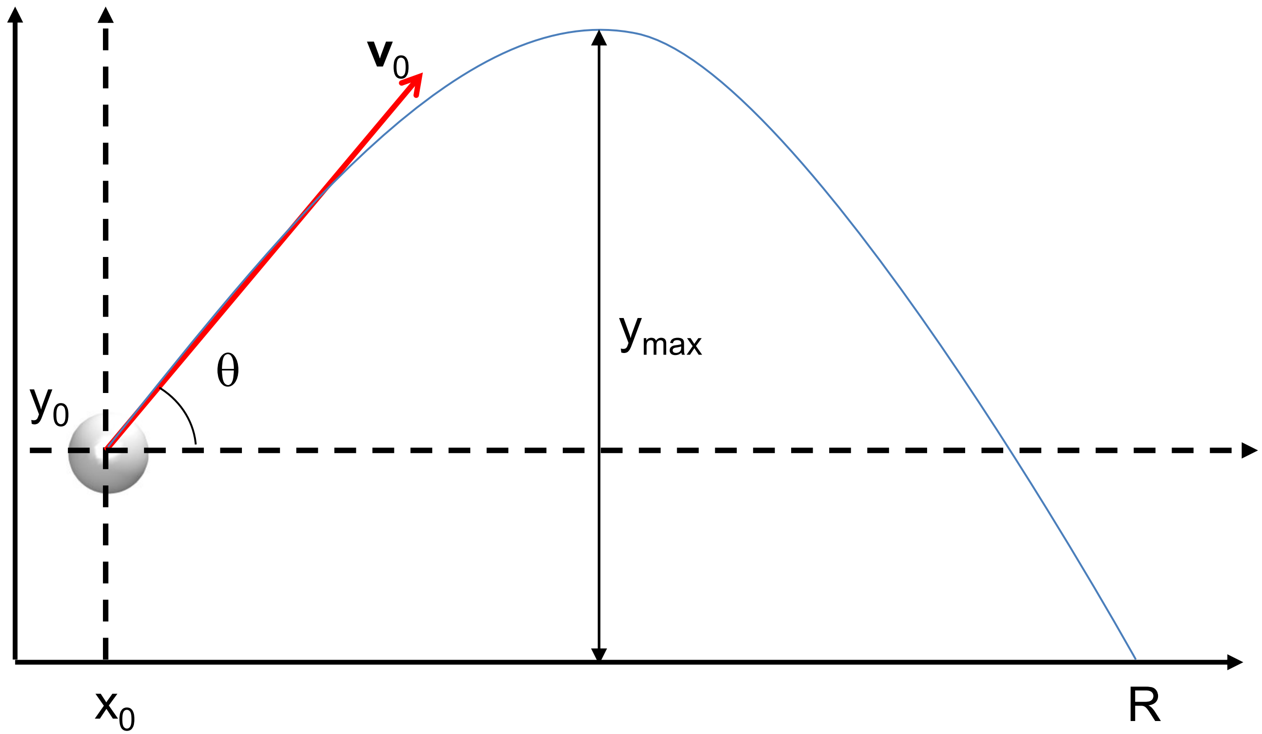
Mecânica Fundamental
Lançamento de Projéteis

Prof. Dr. Walter F. de Azevedo Jr.
azevedolab.net

Vamos calcular o alcance (R) de um projétil lançado na superfície da Terra, com ângulo de inclinação (θ), posição (x_0, y_0) e velocidade inicial ($\mathbf{v_0}$). Além do alcance (R), iremos calcular o tempo de voo (t_{voo}), a velocidade (v_{final}) ao atingir o solo e a altura máxima (y_{max}) atingida pelo projétil. Abaixo temos as principais características do lançamento do projétil, onde desprezamos a resistência do ar.

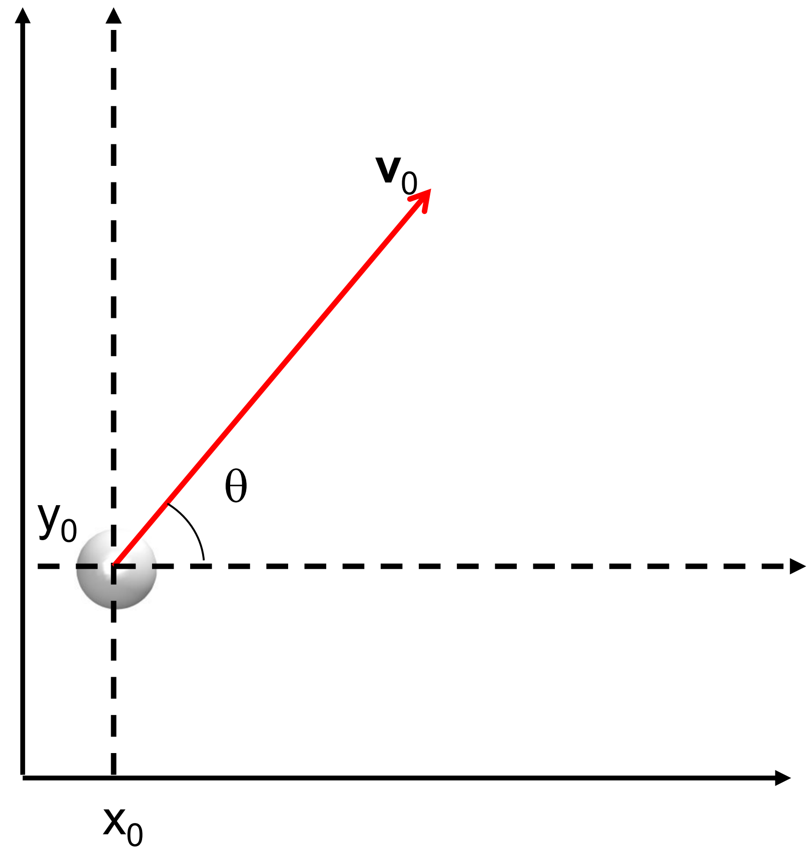


Ao lado temos um diagrama esquemático do lançamento de projétil com velocidade inicial ($\mathbf{v}_0$) e ângulo de lançamento (θ). Calcularemos o alcance do projétil (R), a partir da altura inicial (y_0), posição inicial (x_0), v_0 e o ângulo (θ). Para obtermos a equação do alcance, precisamos dividir o movimento em duas componentes, a horizontal e a vertical. O movimento horizontal, ou seja, ao longo do eixo x não tem aceleração, assim é regido pela seguinte equação:

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

onde v_{0x} é a componente da velocidade ao longo do eixo x, ou seja, a sua projeção ($v_{0x}= v_0 \cos(\theta)$). Assim temos:

$$\boxed{x = x_0 + v_0.\cos(\theta).t} \quad \text{(Equação 1)}$$

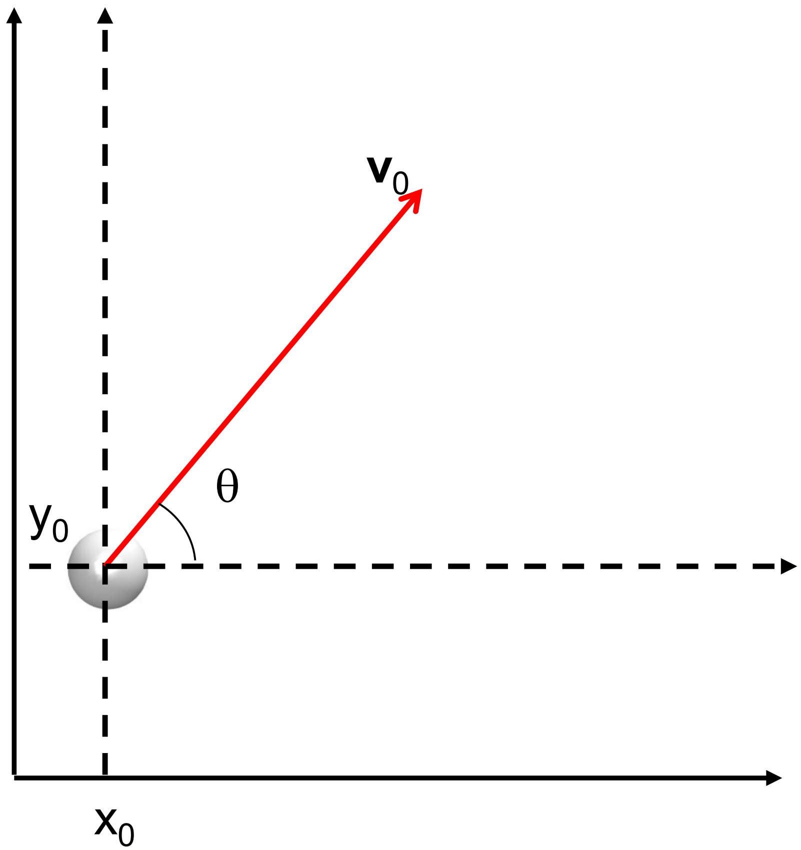


O movimento ao longo do eixo y tem a seguinte equação:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{g}{2}t^2$$

onde $v_{0y} = v_0.\text{sen}(\theta)$, assim temos:

$$\boxed{y = y_0 + v_0.\text{sen}(\theta).t - \frac{g}{2}t^2}$$ (Equação 2)



O alcance é definido como a posição x quando a altura (y) do projétil é zero. Assim temos:

$$0 = y_0 + v_0.\text{sen}(\theta).t - \frac{g}{2}t^2$$

Chegamos a uma equação de segundo grau:

$$\frac{g}{2}t^2 - v_0.\text{sen}(\theta).t - y_0 = 0$$

Na equação de segundo grau temos os seguintes termos: $a = (g/2)$, $b = -v_0.\text{sen}(\theta)$ e $c = -y_0$.

Aplicando-se a fórmula de Bháskara: $$\Delta = b^2 - 4ac = v_0^2 \text{sen}^2(\theta) + 4\frac{g}{2}y_0$$

Ou seja, $$\Delta = v_0^2 \text{sen}^2(\theta) + 2gy_0$$

As duas raízes são as seguintes:

$$\boxed{t_1 = \frac{v_0 \text{sen}(\theta) + \sqrt{v_0^2 \text{sen}^2(\theta) + 2gy_0}}{g}}$$ (Equação 3)

$$\boxed{t_2 = \frac{v_0 \text{sen}(\theta) - \sqrt{v_0^2 \text{sen}^2(\theta) + 2gy_0}}{g}}$$

A solução t_2 é negativa, assim só consideraremos a solução t_1. O tempo t_1 é o tempo para atingir a altura zero, ou seja, quando o projétil chega ao solo. Assim, para obtermos o alcance (R), é só substituirmos a equação 3 na equação 1, como segue:

$$R = x = x_0 + v_0.\cos(\theta).t_1$$

$$\boxed{R = x_0 + v_0\cos(\theta)\left(\frac{v_0\text{sen}(\theta) + \sqrt{v_0^2\text{sen}^2(\theta) + 2gy_0}}{g}\right)}$$

Rearranjando-se os termos, chegamos à equação do alcance (R), indicada abaixo.

$$\boxed{R = x_0 + \left(\frac{v_0\cos(\theta)}{g}\right)\left(v_0\text{sen}(\theta) + \sqrt{v_0^2\text{sen}^2(\theta) + 2gy_0}\right)} \quad \text{(Equação 4)}$$

A altura máxima (y_{max}) pode ser obtida igualando-se a derivada primeira com relação ao tempo da equação da posição vertical (Equação 2) a zero. Após igualarmos a zero isolado a variável tempo, como mostrado abaixo.

$$y = y_0 + v_0.sen(\theta).t - \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = v_0.sen(\theta) - gt = 0$$

$$\boxed{t = \frac{v_0.sen(\theta)}{g}}$$

Substituindo-se o tempo acima na equação da posição vertical (Equação 2), chegamos a uma equação para a altura máxima (y_{max}).

$$y = y_0 + v_0.sen(\theta).t - \frac{g}{2}t^2 = y_0 + v_0.sen(\theta).\frac{v_0.sen(\theta)}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0.sen(\theta)}{g}\right)^2$$

$$= y_0 + \frac{v_0^2.sen^2(\theta)}{g} - \frac{v_0^2.sen^2(\theta)}{2g} => \boxed{y_{max} = y_0 + \frac{v_0^2.sen^2(\theta)}{2g}} \quad \text{(Equação 5)}$$

Outro parâmetro, facilmente calculado para o movimento do projétil, é a velocidade ao atingir o solo. Manteremos a abordagem inicial de analisarmos as componentes cartesianas do movimento do projétil. Ao longo de x vimos que a posição é dada pela equação 1:

$$x = x_0 + v_0.\cos(\theta).t$$

Derivando-se expressão acima com relação ao tempo temos:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_0.\cos(\theta)$$

Ao longo de y temos a velocidade dada pela equação:

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_0.\text{sen}(\theta) - gt \qquad \text{(Equação 6)}$$

O tempo quando o projétil chega ao solo já foi calculado (Equação 3), e vale:

$$t_1 = \frac{v_0 \text{sen}(\theta) + \sqrt{v_0^2 \text{sen}^2(\theta) + 2gy_0}}{g}$$

Assim só temos que substituir o tempo na equação da velocidade v_y (Equação 6), como mostrado no próximo slide.

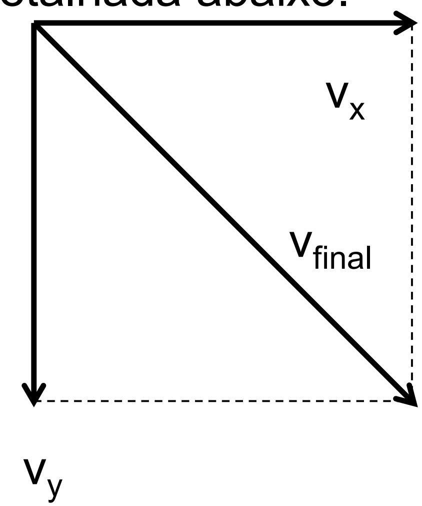
A velocidade v_y fica da seguinte forma:

$$v_y = v_0.\text{sen}(\theta) - gt = v_0.\text{sen}(\theta) - g\left(\frac{v_0\text{sen}(\theta) + \sqrt{v_0^2\text{sen}^2(\theta) + 2gy_0}}{g}\right)$$

$$v_y = v_0.\text{sen}(\theta) - v_0\text{sen}(\theta) - \sqrt{v_0^2\text{sen}^2(\theta) + 2gy_0}$$

$$v_y = -\sqrt{v_0^2\text{sen}^2(\theta) + 2gy_0}$$

A partir das componentes ao longo de x e y podemos calcular a velocidade final (v_{final}), detalhada abaixo.



$$v_{final}^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2\cos^2(\theta) + v_0^2\text{sen}^2(\theta) + 2gy_0 =$$

$$v_0^2\left(\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)\right) + 2gy_0$$

$$v_{final}^2 = v_0^2 + 2gy_0$$

$$\boxed{v_{final} = \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}$$ (Equação 7)

Assim, a partir do ângulo de lançamento (θ), da posição inicial (x_0 , y_0) e da velocidade inicial (v_0), podemos determinar o alcance, a altura máxima e a velocidade do projétil ao atingir o solo. As equações estão indicadas abaixo.

1) Alcance (R) é dado pela equação 4:

$$\boxed{R = x_0 + \left(\frac{v_0\cos(\theta)}{g}\right)\left(v_0\mathrm{sen}(\theta) + \sqrt{v_0^2\mathrm{sen}^2(\theta) + 2gy_0}\right)}$$

2) Altura máxima (y_{max}) é dada pela equação 5:

$$\boxed{y_{max} = y_0 + \frac{v_0^2.\mathrm{sen}^2(\theta)}{2g}}$$

3) Velocidade ao chegar ao solo (v_{final}) é dada pela equação 7:

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}$$

Referências

-SERWAY Raymond A.; VUILLE Chris. **College Physics. Volume 1**. 9ª ed. Boston: Brooks/Cole CENGAGE Learning, 2012. 512p.

-YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN Roger A. **Sears Zemansky Física I Mecânica.** 10ª ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003. 367p.

Última atualização em 29 de agosto de 2018.