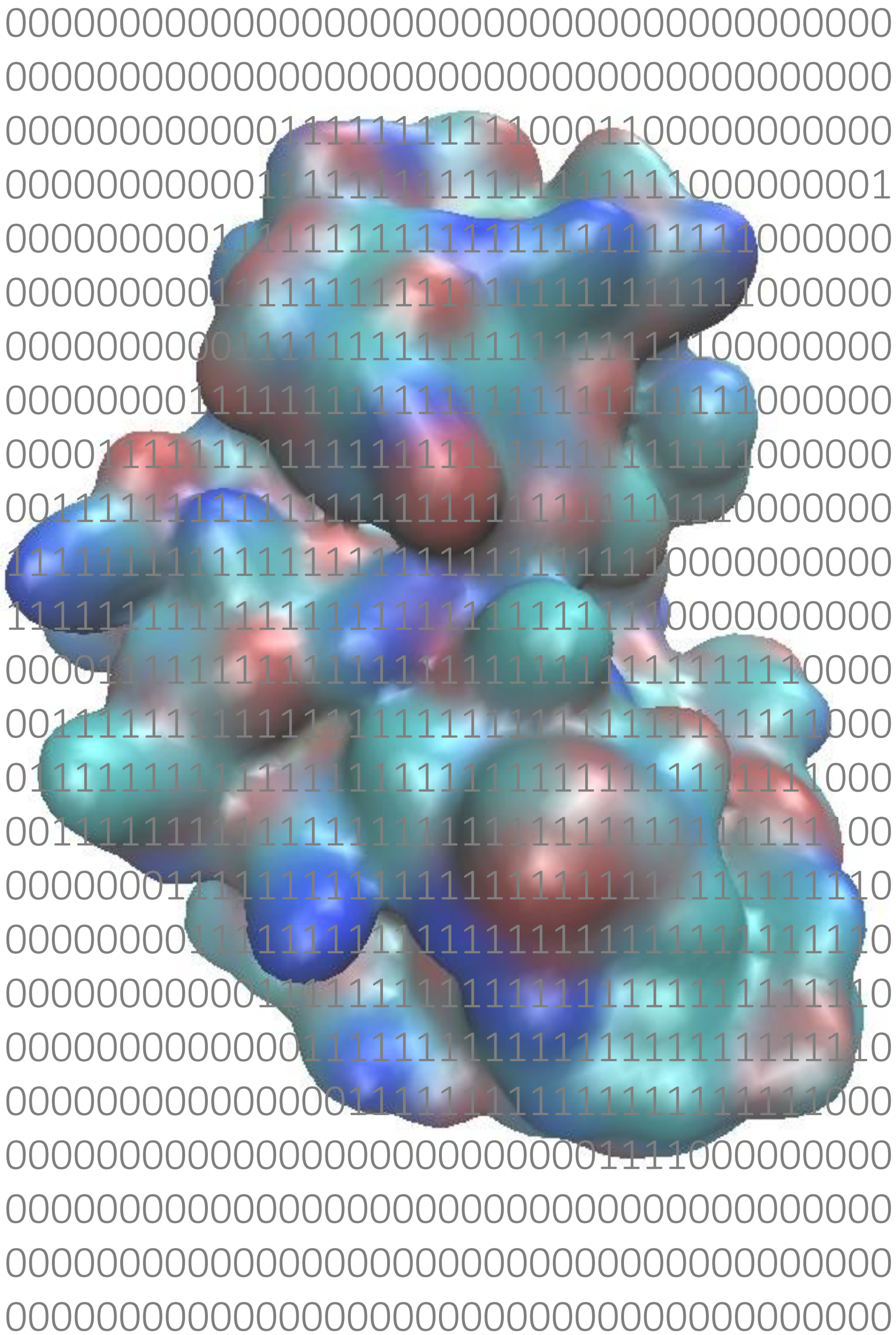
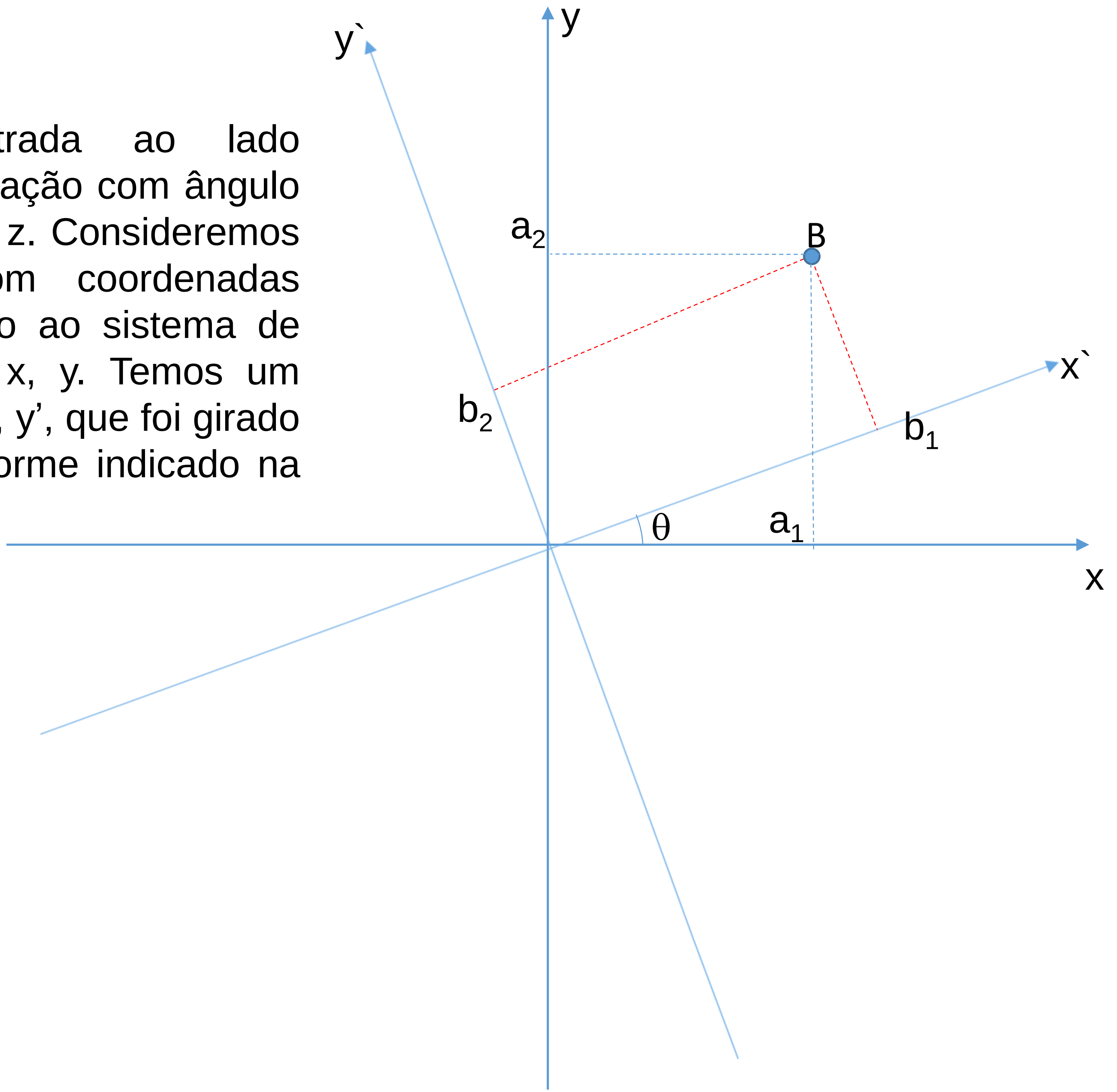


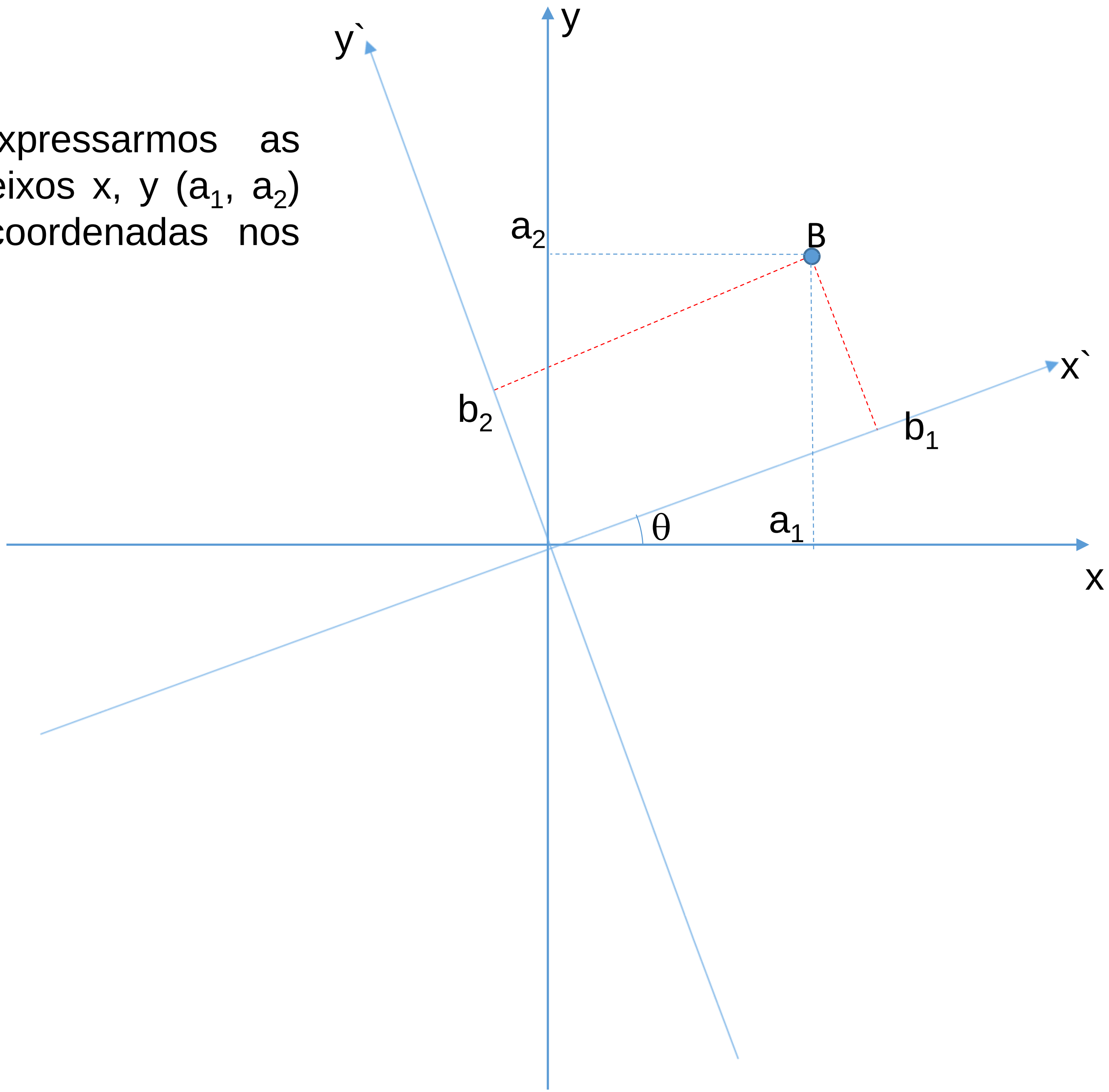
Biologia Estrutural

Matrizes de Rotação ao Longo dos Eixos x, y e z,

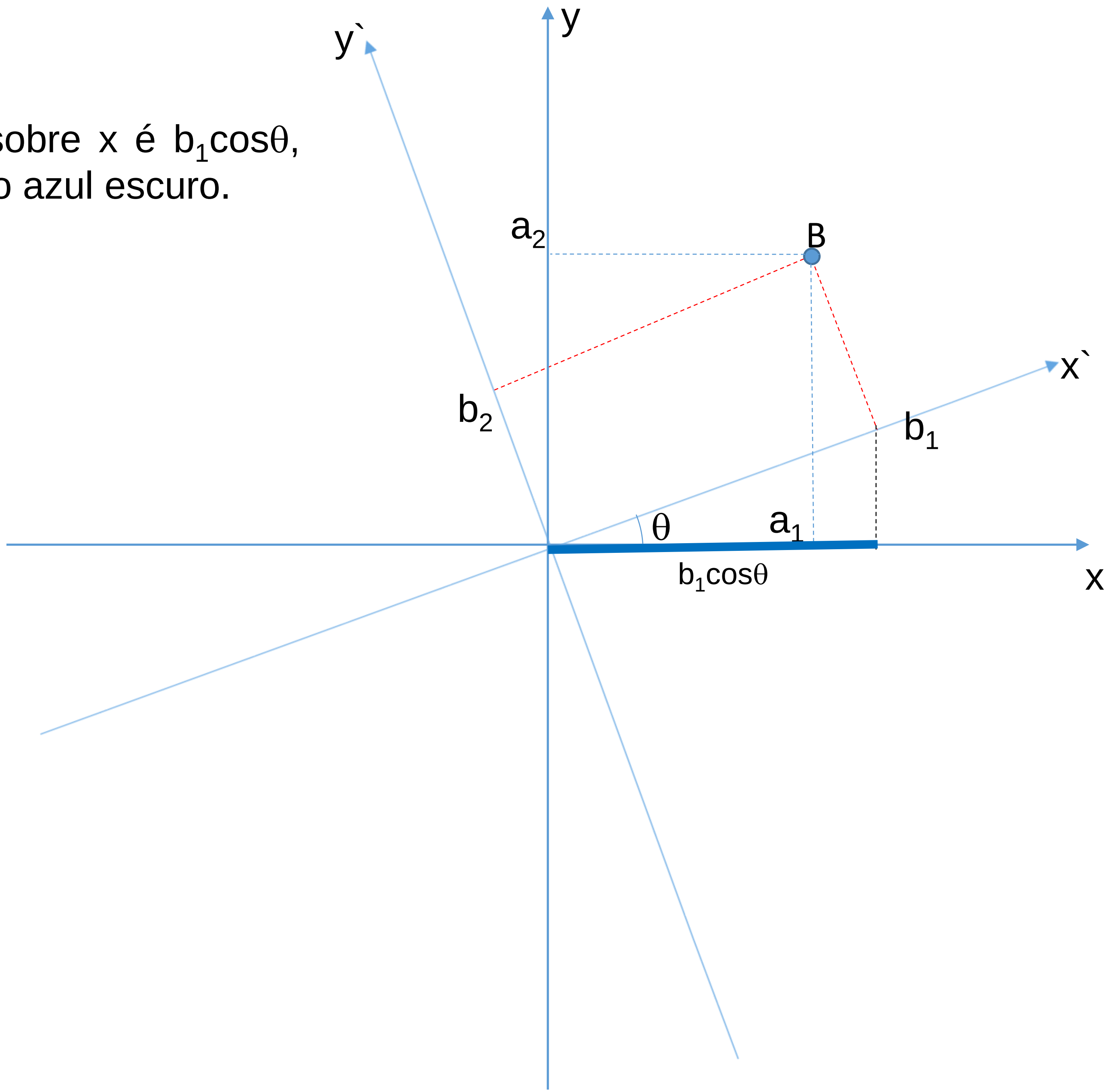
A situação ilustrada ao lado representa uma rotação com ângulo θ ao longo do eixo z. Consideremos um ponto B com coordenadas (a_1,a_2) com relação ao sistema de eixos ortonormais x, y. Temos um sistema de eixos x', y', que foi girado um ângulo θ, conforme indicado na figura ao lado.



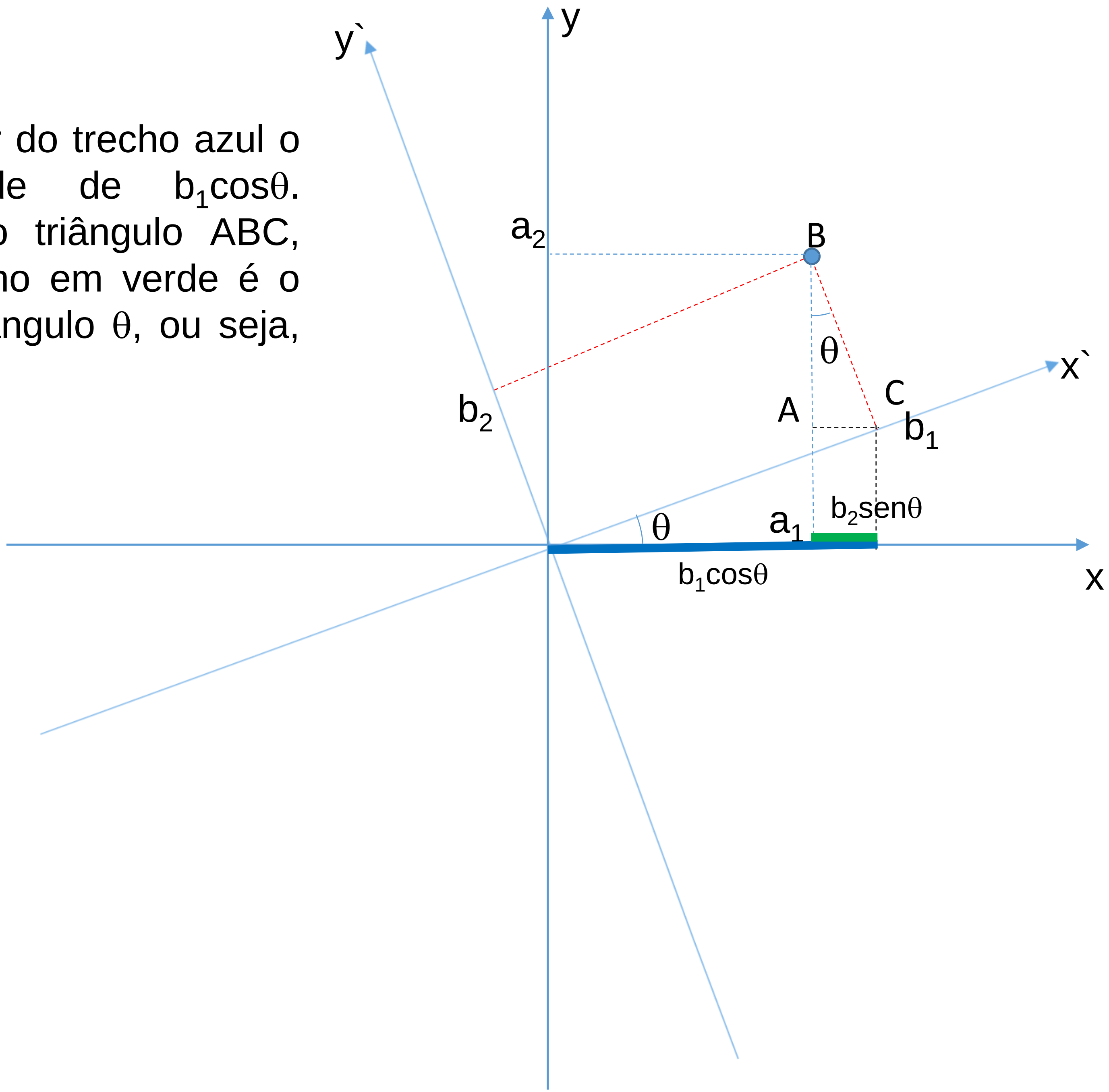
O objetivo é expressarmos as coordenadas nos eixos x, y (a_1, a_2) em função das coordenadas nos eixos x', y' (b_1, b_2).



A projeção de b_1 sobre x é $b_1 \cos\theta$, indicado pelo trecho azul escuro.

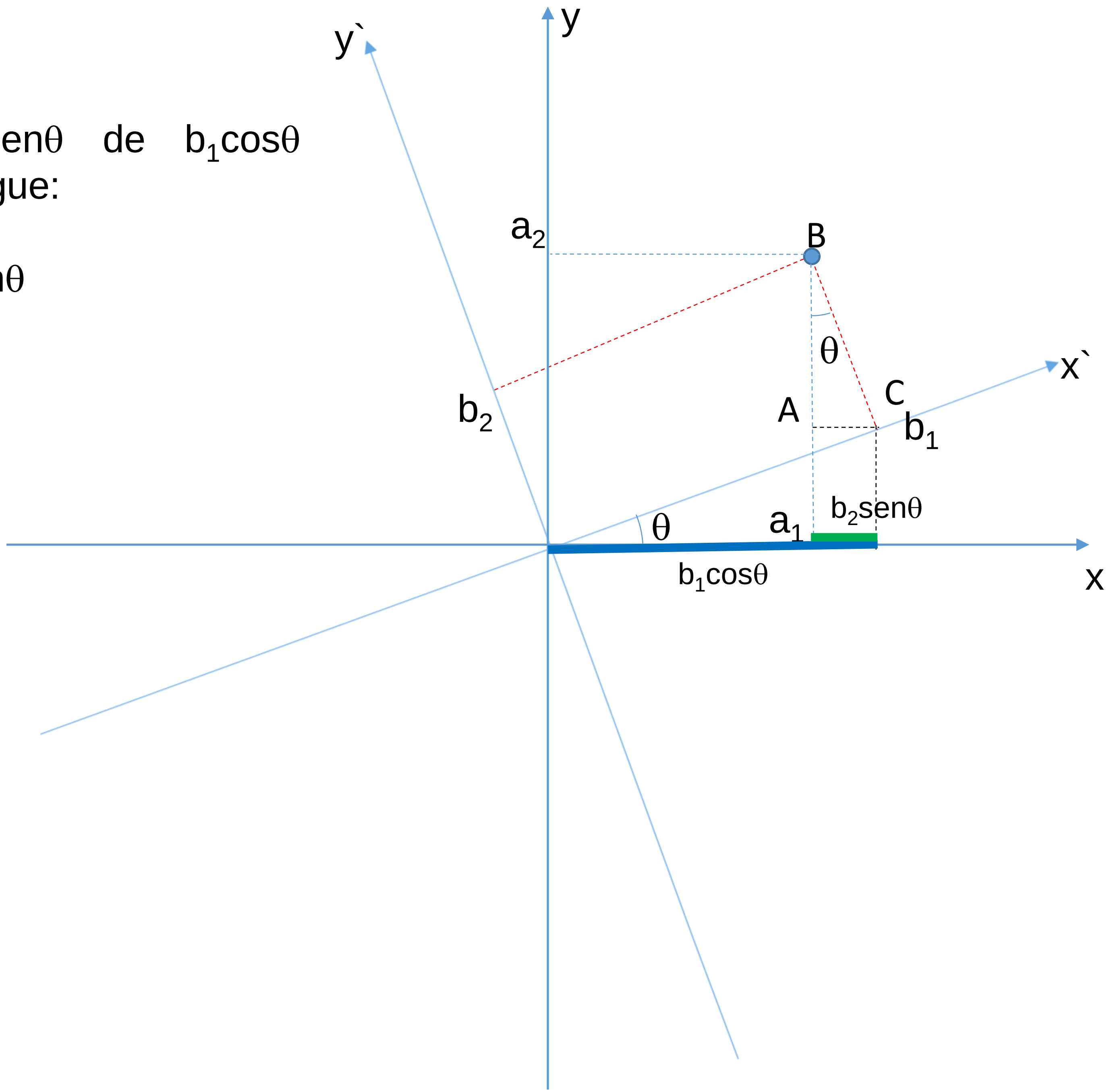


Temos que subtrair do trecho azul o trecho em verde de $b_1\cos\theta$. Considerando-se o triângulo ABC, vemos que o trecho em verde é o cateto oposto ao ângulo θ, ou seja, $b_2 \operatorname{sen}\theta$.

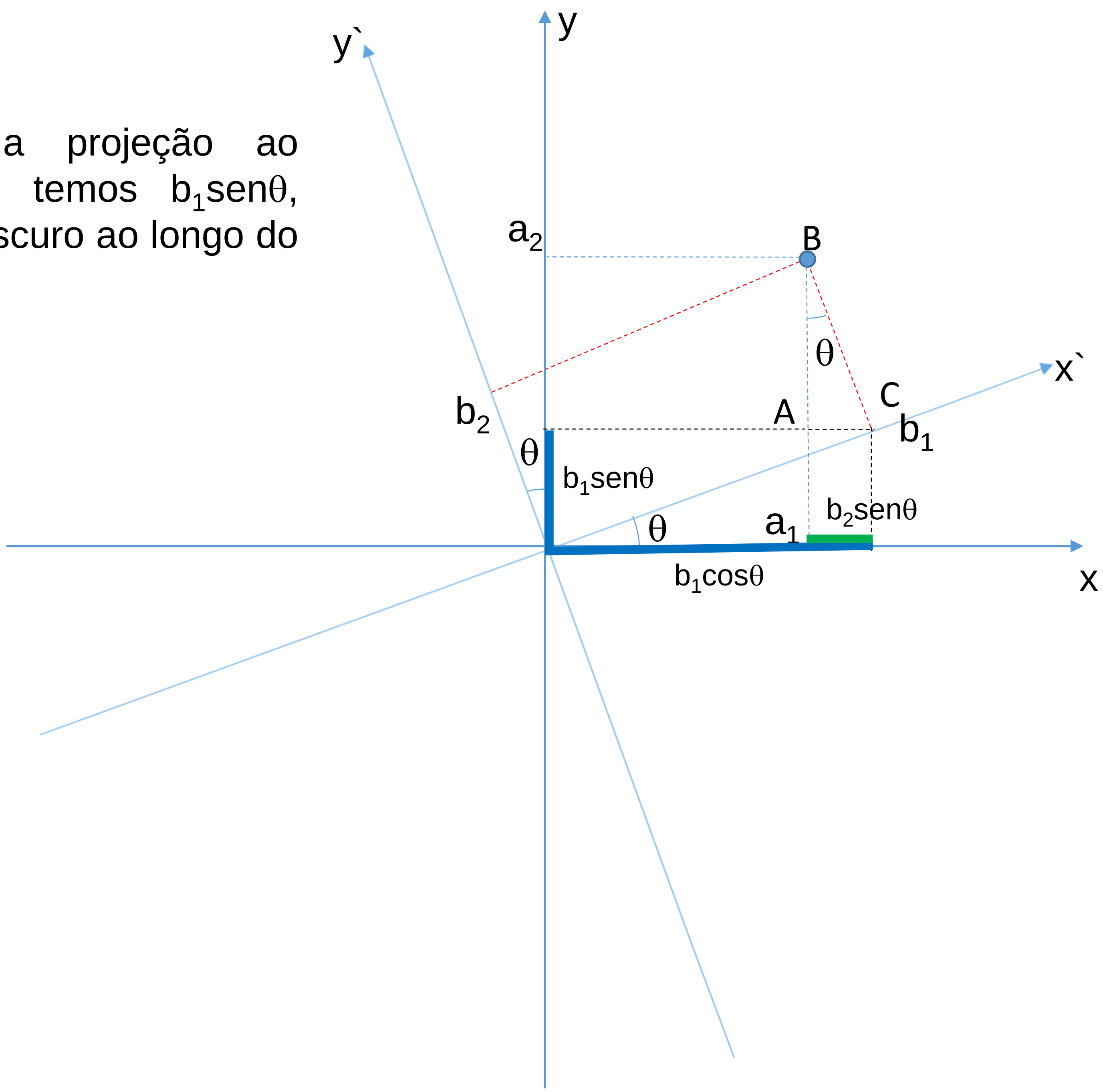


Subtraindo-se $b_2 sen\theta$ de $b_1 cos\theta$ temos a_1, como segue:

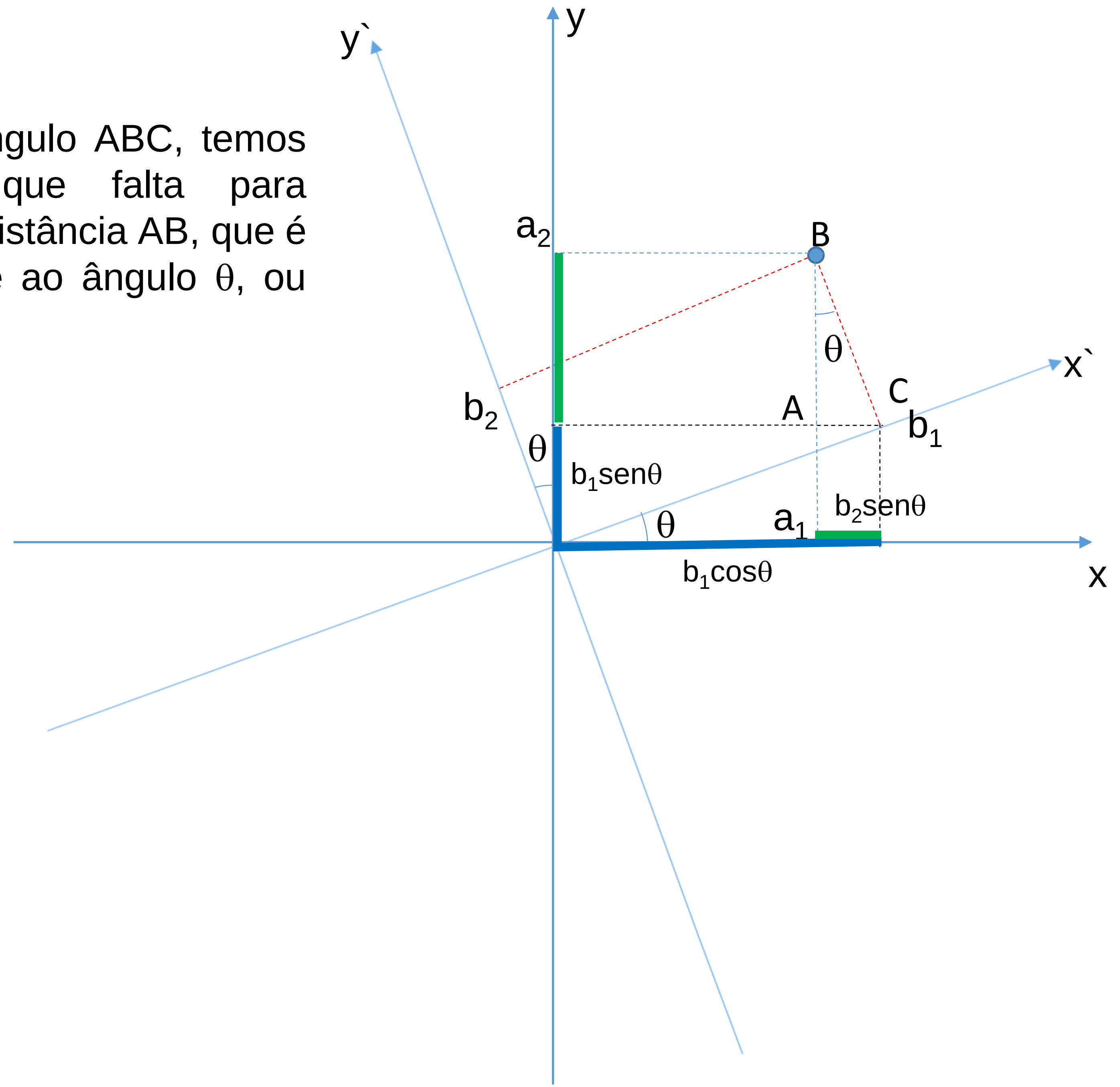
$a_1 = b_1 cos\ \theta - b_2 sen\theta$



Considerando-se a projeção ao longo do eixo y, temos $b_1sen\theta$, indicado em azul escuro ao longo do eixo y.

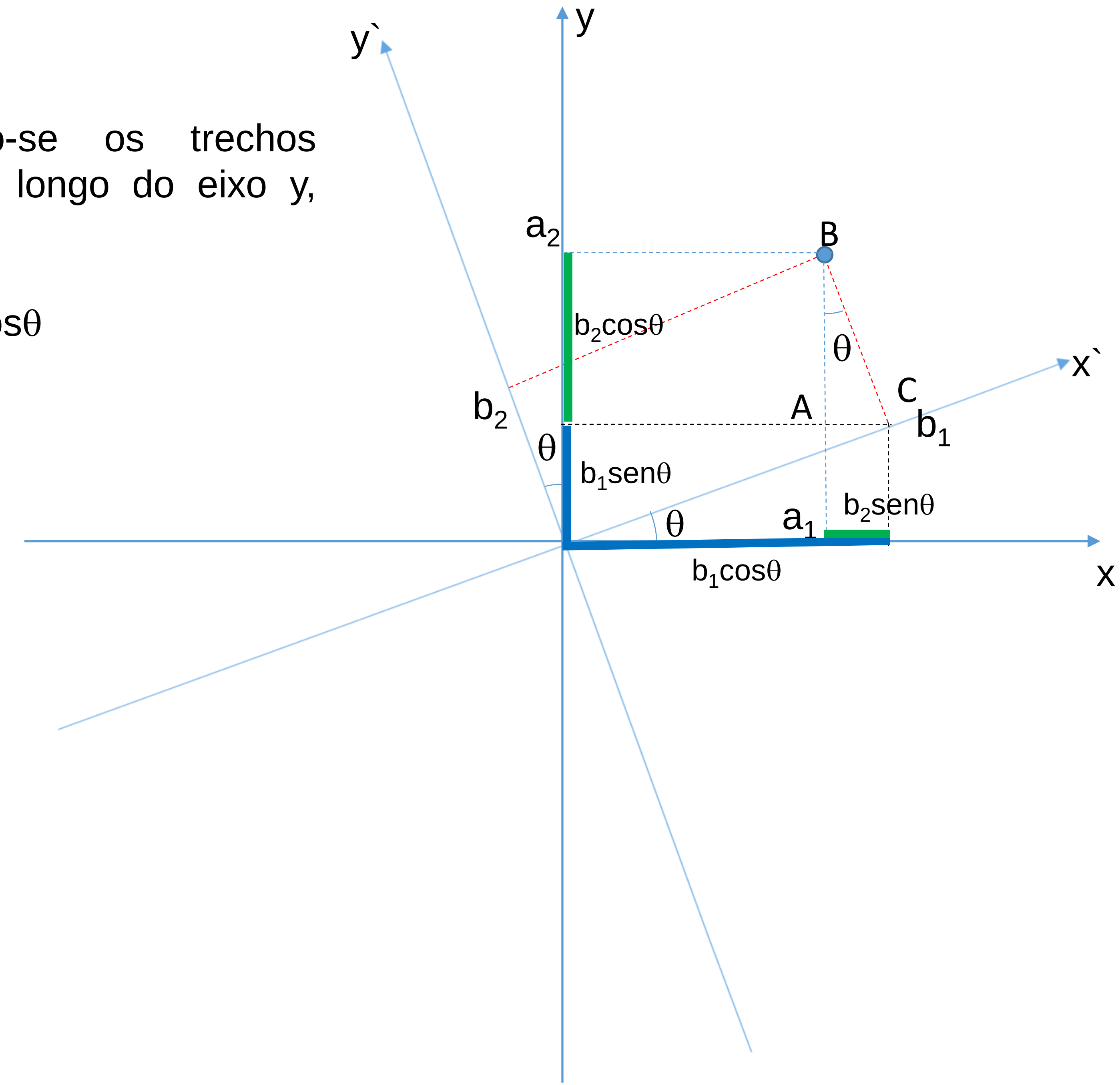


Olhando-se o triângulo ABC, temos que o trecho que falta para completar a_2, é a distância AB, que é o cateto adjacente ao ângulo θ, ou seja, $b_2\cos\theta$.



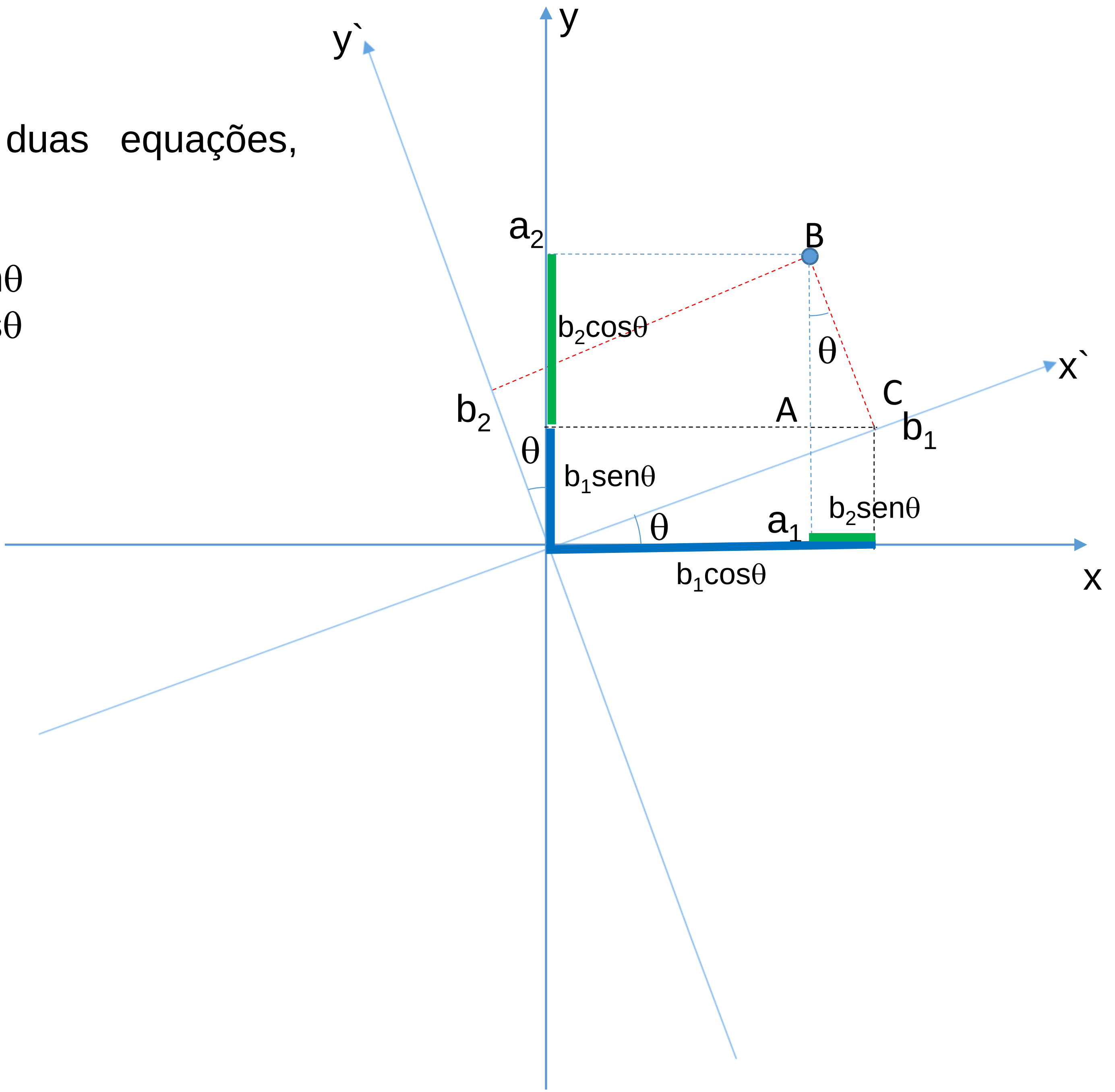
Assim, somando-se os trechos verde e azul, ao longo do eixo y, temos:

$a_2 = b_1\text{sen}\theta + b_2\cos\theta$



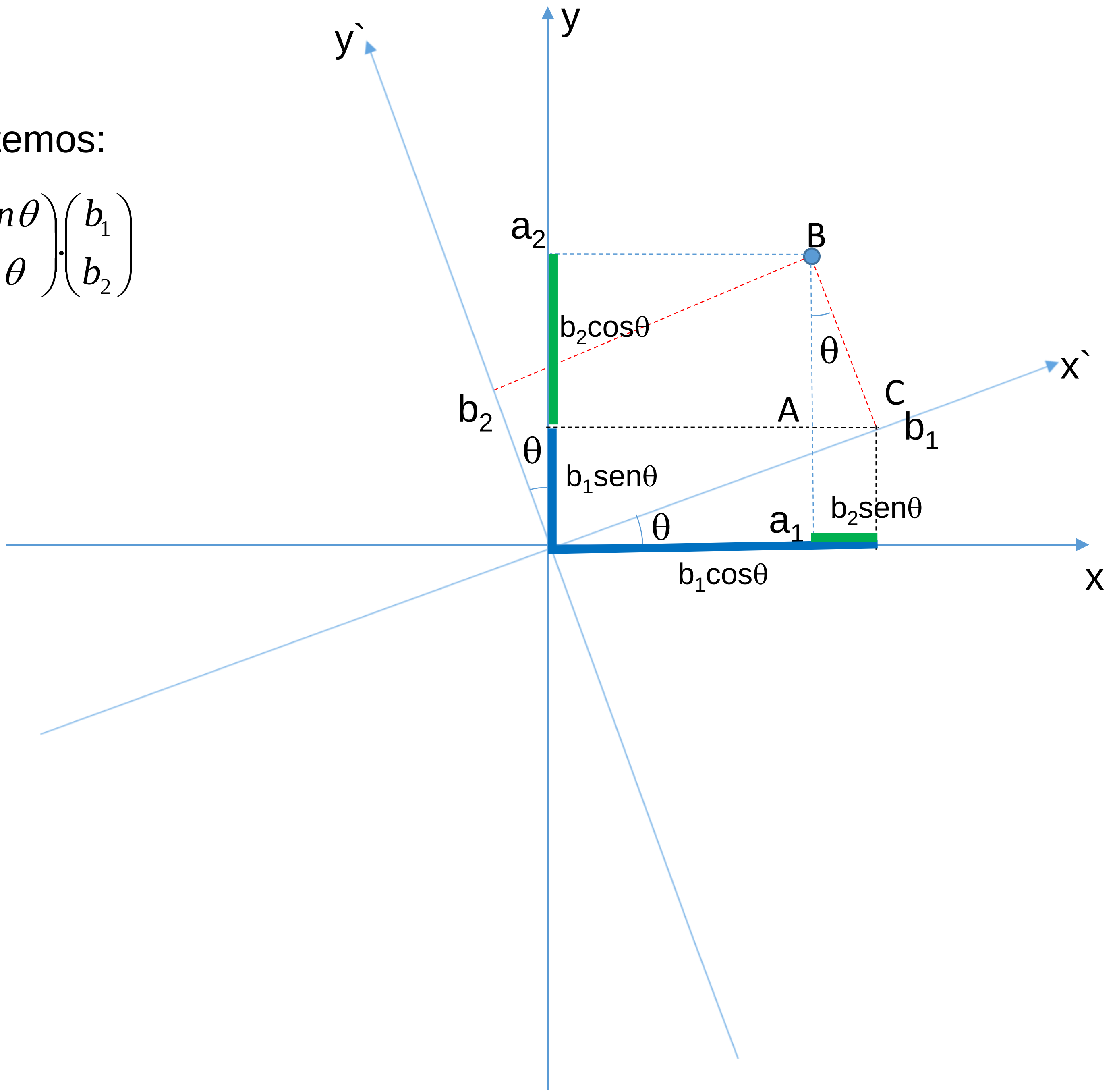
Colocando-se as duas equações, temos:

$a_1 = b_1 \cos\theta - b_2 \text{sen}\theta$
$a_2 = b_1 \text{sen}\theta + b_2 \cos\theta$



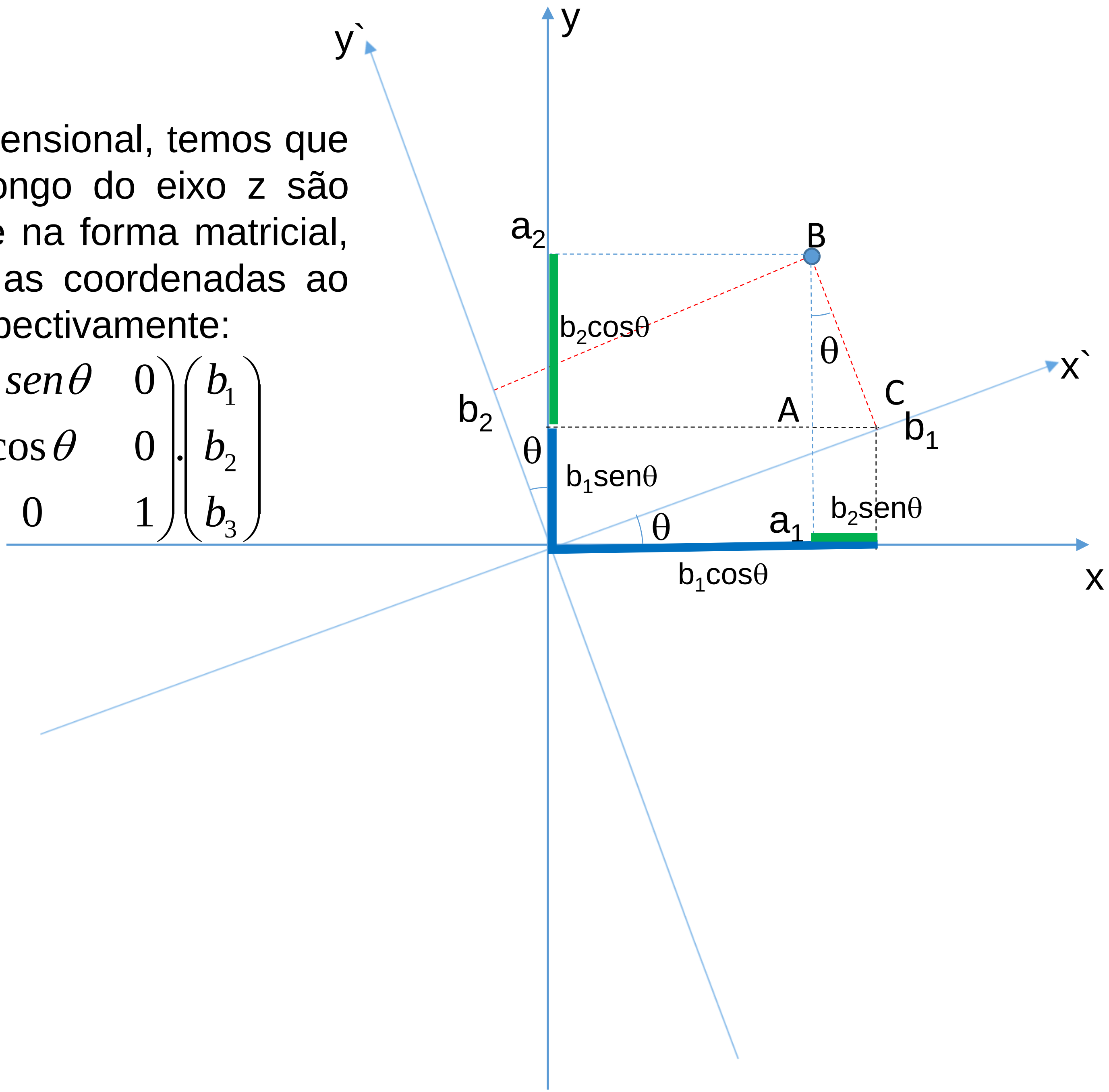
Na forma matricial temos:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$



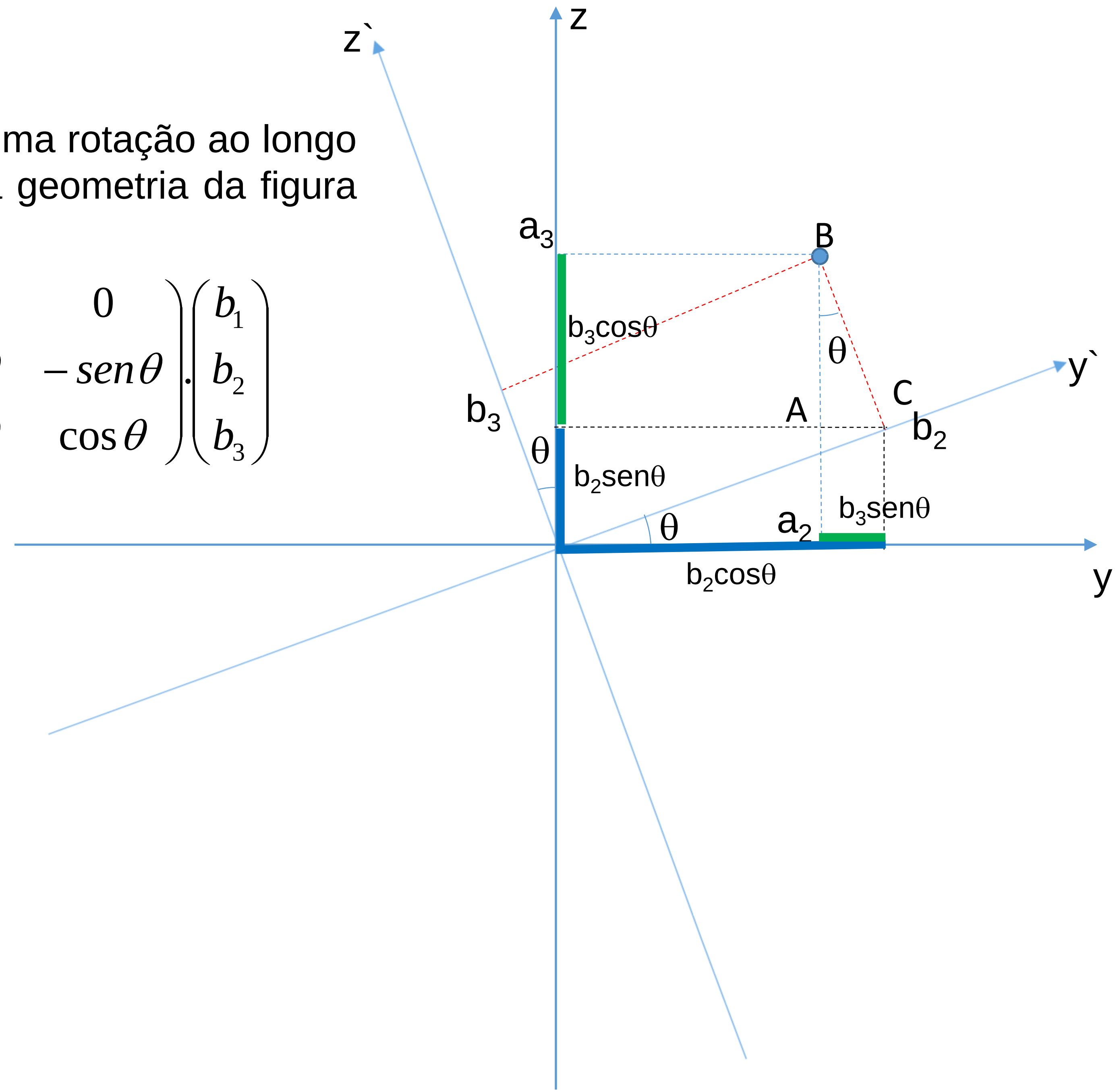
Num sistema tridimensional, temos que as projeções ao longo do eixo z são zero. Colocando-se na forma matricial, onde a_3 e b_3 são as coordenadas ao longo de z e z', respectivamente:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$



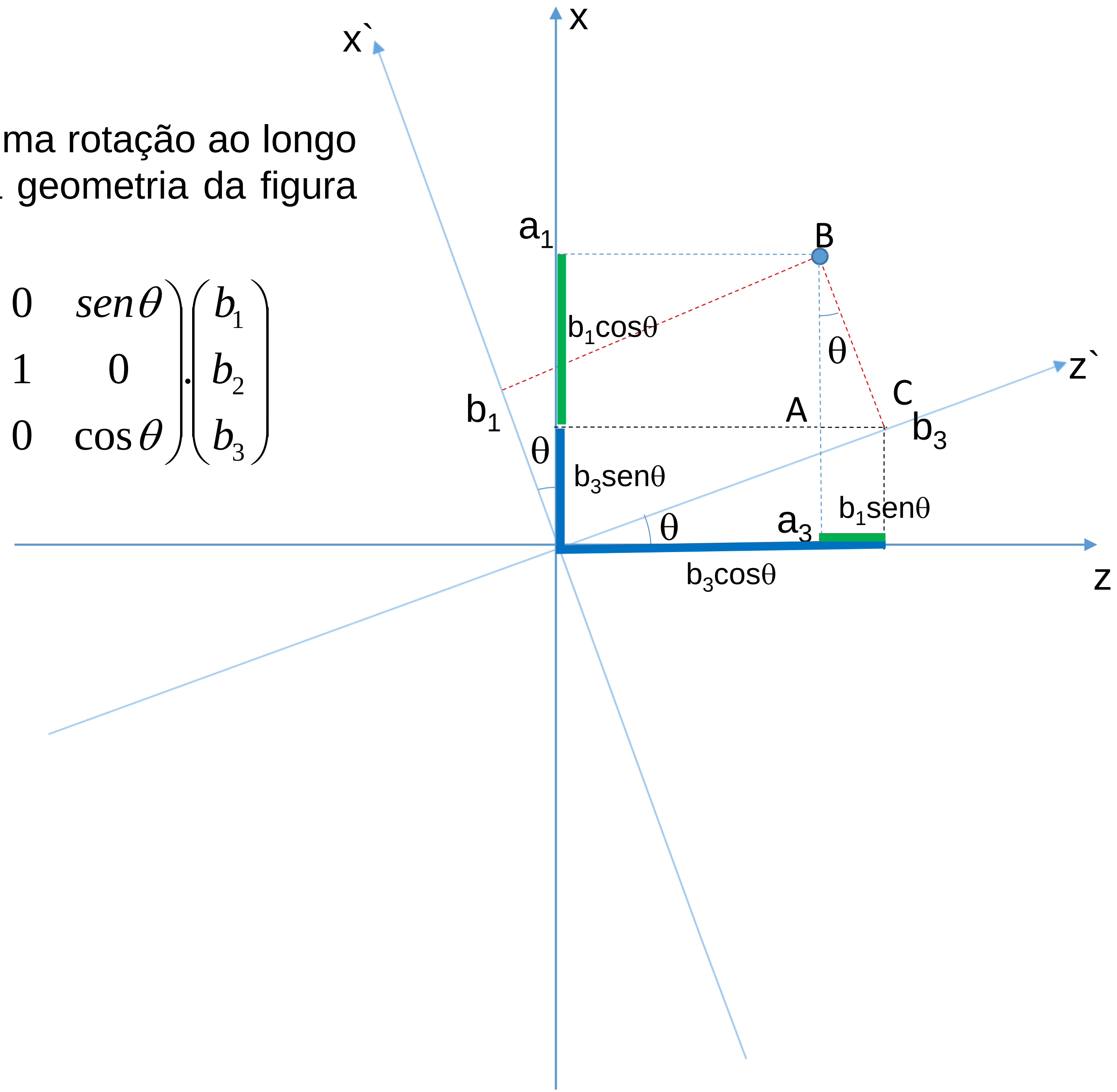
Considerando-se uma rotação ao longo do eixo x, temos a geometria da figura indicada ao lado.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$



Considerando-se uma rotação ao longo do eixo x, temos a geometria da figura indicada ao lado.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$



Resumindo as matrizes de rotação são seguintes:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Rotação ao longo do eixo z

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Rotação ao longo do eixo y

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Rotação ao longo do eixo x

Referências

Drenth, J. (1994). *Principles of Protein X-ray Crystallography*. New York: Springer-Verlag.

Rhodes, G. (2000). *Crystallography Made Crystal Clear*. 2nd ed.San Diego: Academic Press.

Stout, G. H. & Jensen, L. H. (1989). *X-Ray Structure Determination. A Practical Guide*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons.

Última atualização em 20 de abril de 2015.