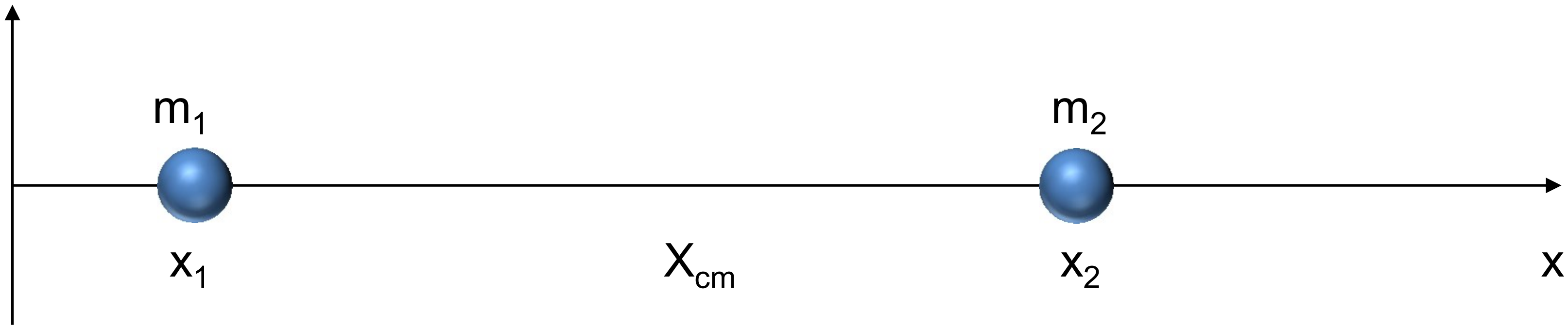
Mecânica Newtoniana: Sistema de Partículas

Prof. Dr. Walter F. de Azevedo Jr. E-mail: walter@azevedolab.net

Considere um sistema de duas partículas de massas m_1 e m_2 mostrado abaixo.

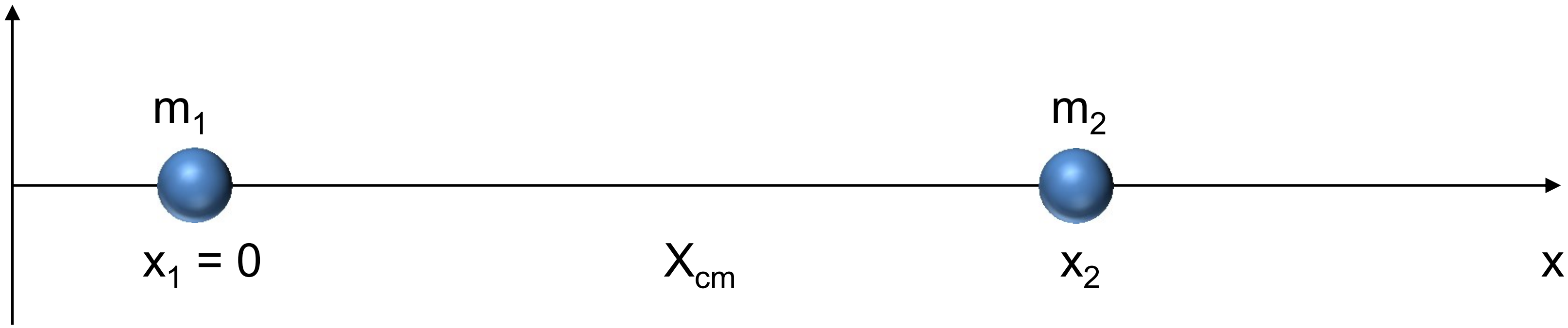


$$MX_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2$$

onde $M = m_1 + m_2$ e X_{cm} é a coordenada do centro de massa

Centro de Massa

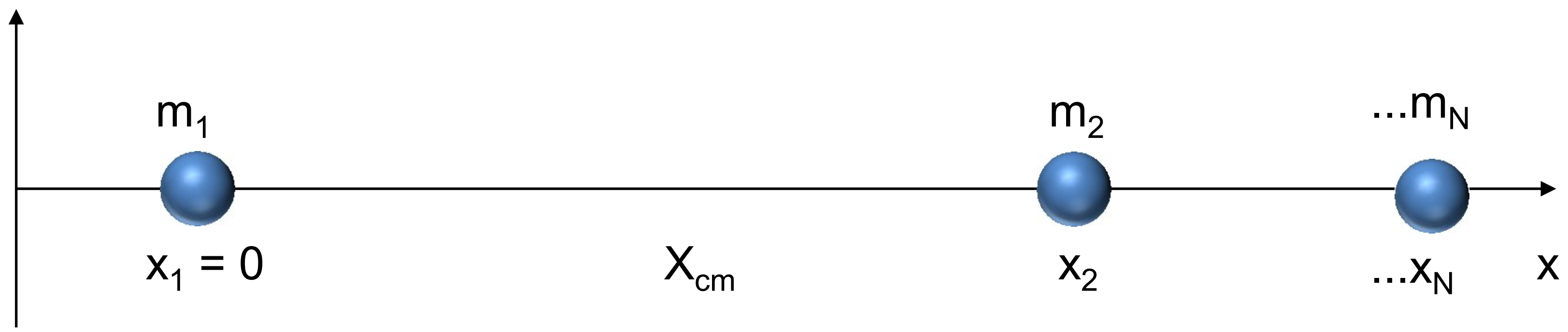
Se considerarmos que a massa m_1 está na origem, temos a seguinte expressão:



$MX_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 \;\; = m_1.(0) + m_2x_2 = m_2x_2 \Rightarrow X_{cm} = (m_2/M)x_2$

onde $M = m_1 + m_2$ e X_{cm} é a coordenada do centro de massa

Considerando-se um sistema com N partículas, temos a seguinte expressão:

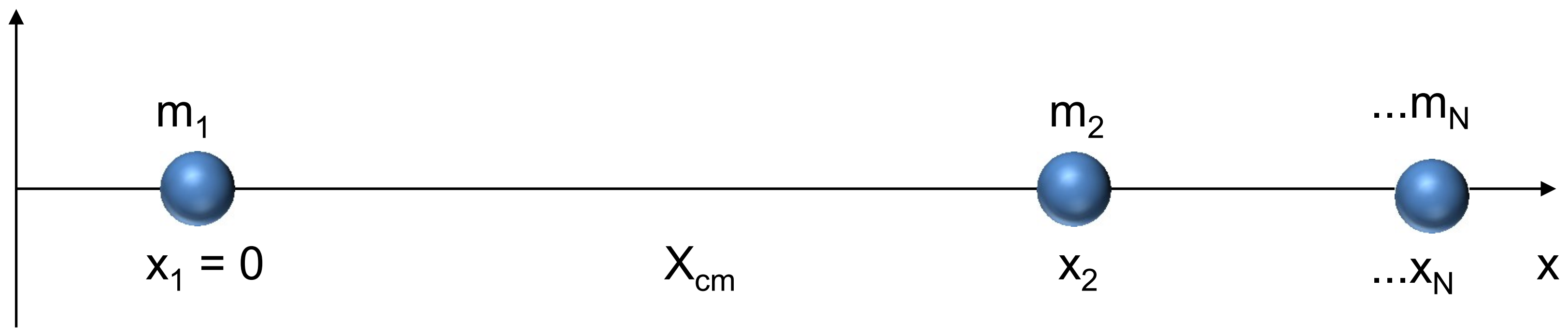


$MX_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_Nx_N$

onde $M = m_1 + m_2 + ... + m_N = \Sigma m_i$

e X_{cm} é a coordenada do centro de massa

Para os outros eixos, temos:



$MY_{cm} = m_1y_1 + m_2y_2 +...+ m_Ny_N$

onde $M = m_1 + m_2 +...+ m_N = \Sigma m_i$

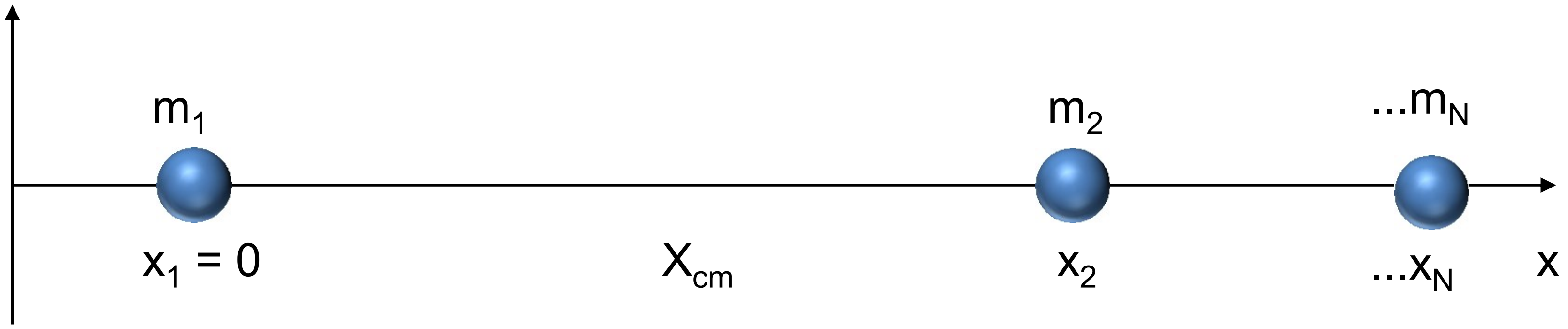
e Y_{cm} é a coordenada y do centro de massa

$MZ_{cm} = m_1z_1 + m_2z_2 +...+ m_Nz_N$

onde $M = m_1 + m_2 +...+ m_N = \Sigma m_i$

e Z_{cm} é a coordenada z do centro de massa

Em notação vetorial, temos:

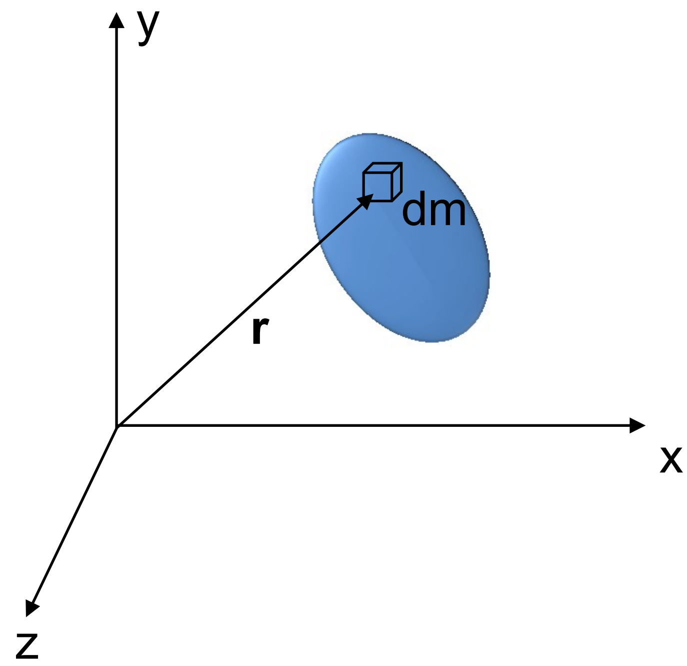


$$M\mathbf{R}_{cm} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + ... + m_N\mathbf{r}_N = \Sigma m_i\,\mathbf{r}_i$$

onde $M = m_1 + m_2 + ... + m_N = \Sigma m_i$ e $\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$

Para um objeto com uma distribuição contínua de massa, o centro de massa tem a seguinte expressão:

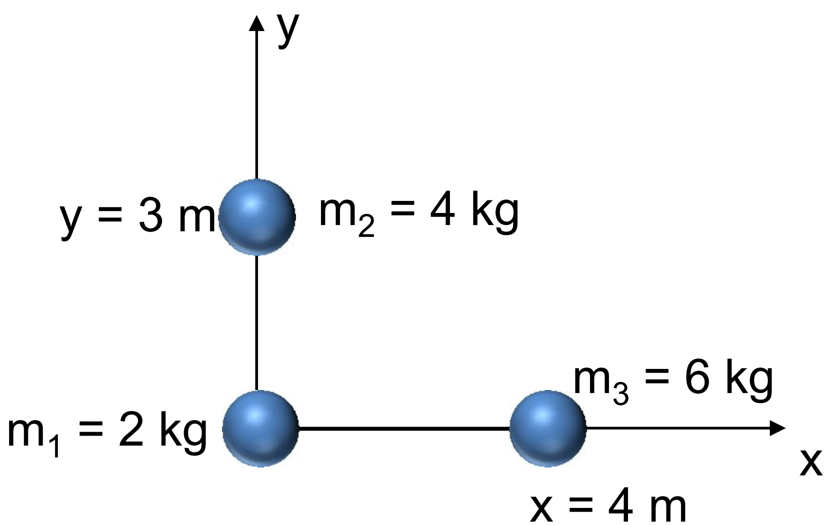
$$M\boldsymbol{R}_{mc} = \int \boldsymbol{r}dm$$



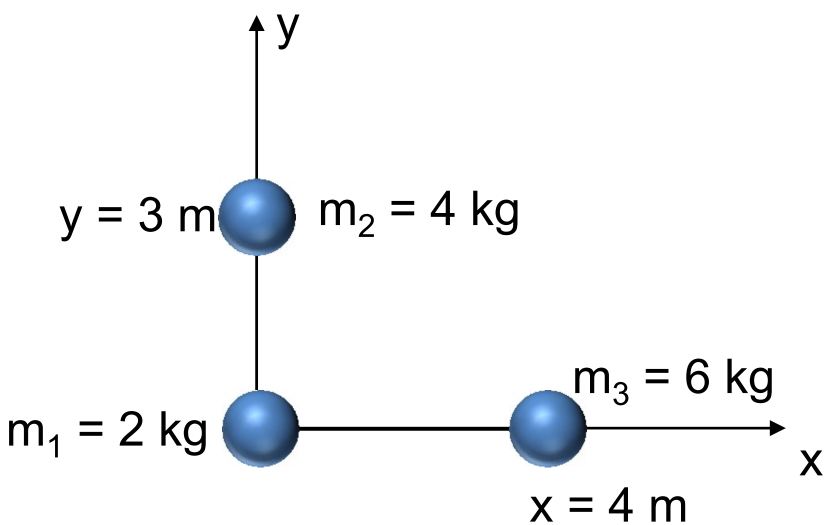
dm é um elemento de massa localizado em **r**.

Exemplo 1. Achar o centro de massa de um sistema constituído de três partículas: $m_1 = 2$ kg, na origem, $m_2 = 4$ kg, sobre o eixo dos y em $y = 3$ m e $m_3 = 6$ kg sobre o eixo dos x em $x = 4$ m.

Solução. Abaixo temos o diagrama esquemático para o sistema de partículas.



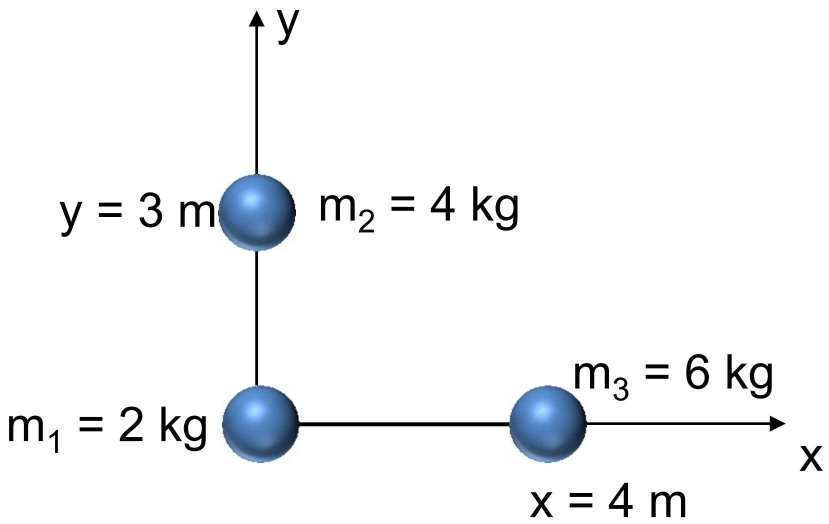
Solução. Ao longo do eixo x, temos:



$MX_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 2.0 + 4.0 + 6.4 = 24$ kg.m

onde $M = m_1 + m_2 + m_3 =$ 2kg + 4 kg + 6 kg = 12 kg

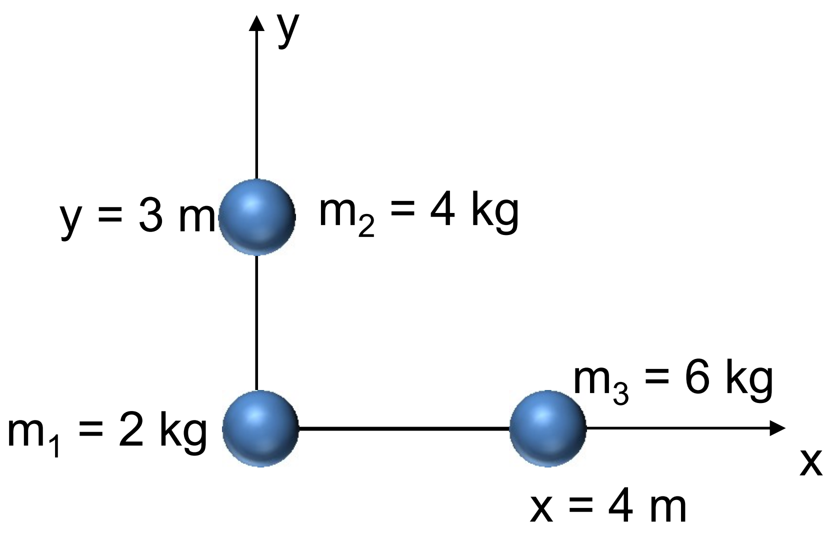
Solução. Abaixo temos o valor da coordenada X_{cm}.



$MX_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 2.0 + 4.0 + 6.4 = 24\ kg.m \Rightarrow X_{cm} = 24/12 = \boxed{2\ m}$

onde $M = m_1 + m_2 + m_3 =$ 2kg + 4 kg + 6 kg = 12 kg

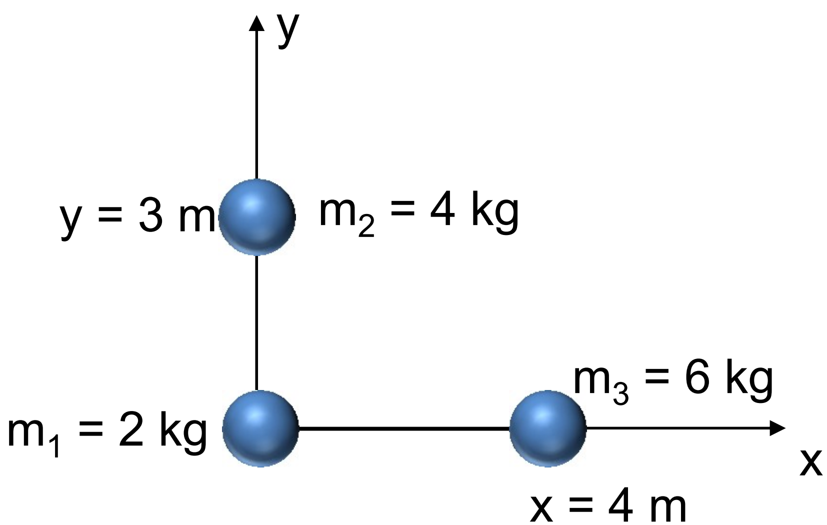
Solução. Ao longo do eixo y, temos:



$$MY_{cm} = m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 = 2.0 + 4.3 + 6.0 = 12 \text{ kg.m}$$

onde $M = m_1 + m_2 + m_3 = 2\text{kg} + 4\text{ kg} + 6\text{ kg} = 12\text{ kg}$

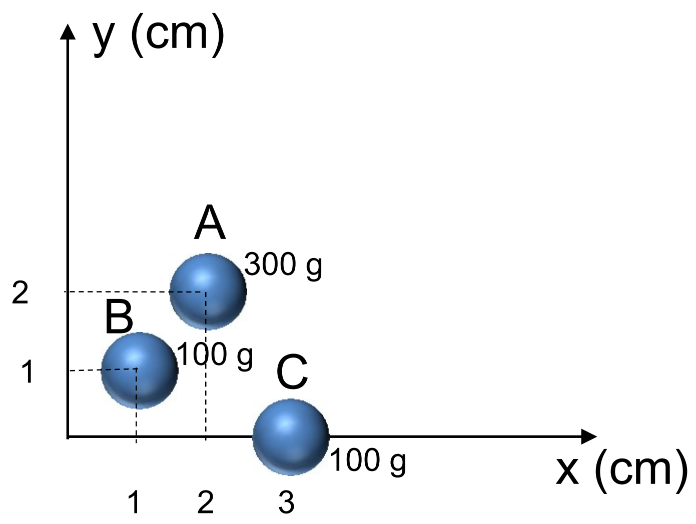
Solução. A coordenada Y_{cm} tem o seguinte valor:



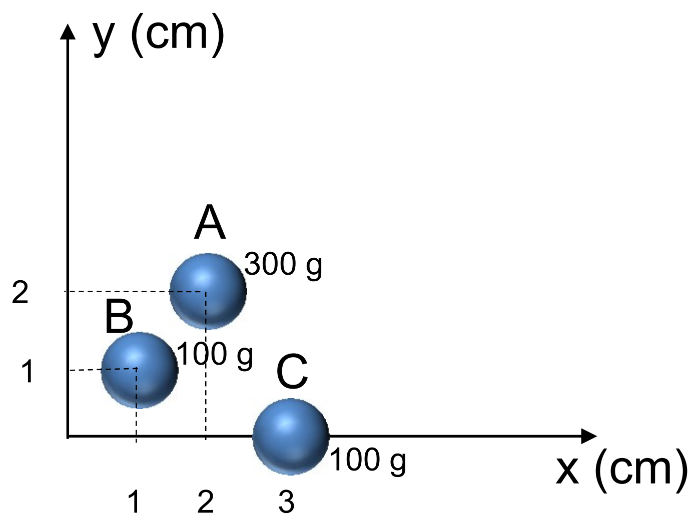
$MY_{cm} = m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 = 2.0 + 4.3 + 6.0 = 12\ \text{kg.m} \Rightarrow Y_{cm} = 12/12 = \boxed{1\ \text{m}}$

onde $M = m_1 + m_2 + m_3 = 2\text{kg} + 4\ \text{kg} + 6\ \text{kg} = 12\ \text{kg}$

Exemplo 2. Achar o centro de massa de um sistema constituído de três partículas A, B e C como mostrado abaixo. Dê a resposta em centímetros.



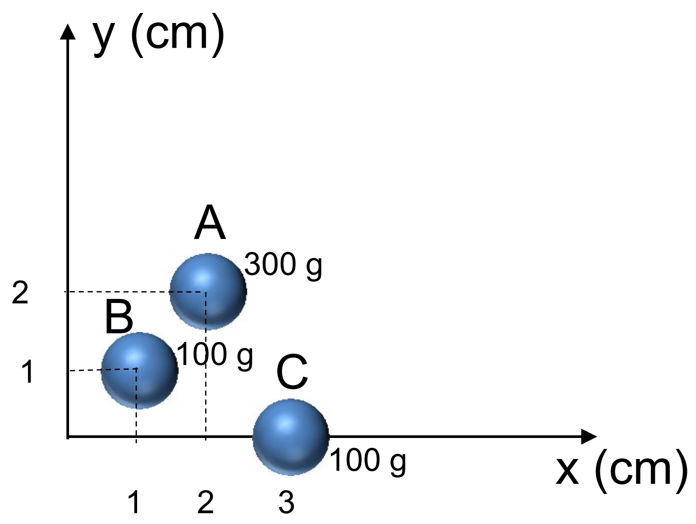
Solução. Ao longo do eixo x, temos:



$MX_{cm} = m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C = 300.2 + 100.1 + 100.3 = 1000$ g.cm

onde $M = m_A + m_B + m_C =$ 300 g + 100 g + 100 g = 500 g

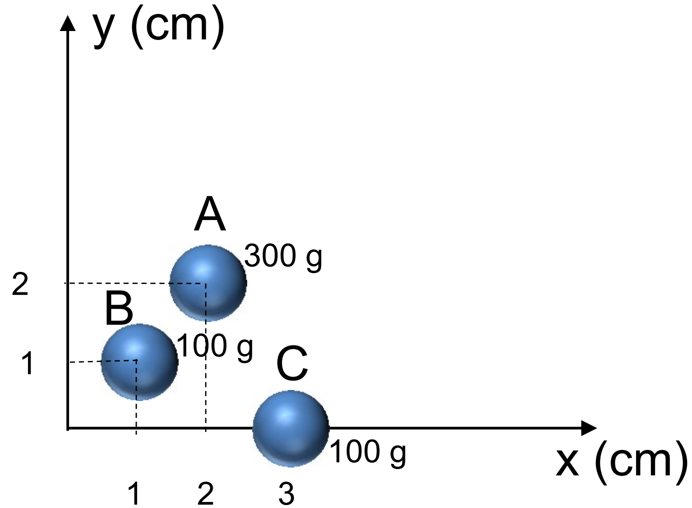
Solução. A coordenada X_{cm} tem o seguinte valor:



$MX_{cm} = m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C = 300.2+100.1+100.3 = 1000$ g.cm => $X_{cm} = 1000/500 = 2$ cm

onde $M = m_A + m_B + m_C =$ 300 g + 100 g + 100 g = 500 g

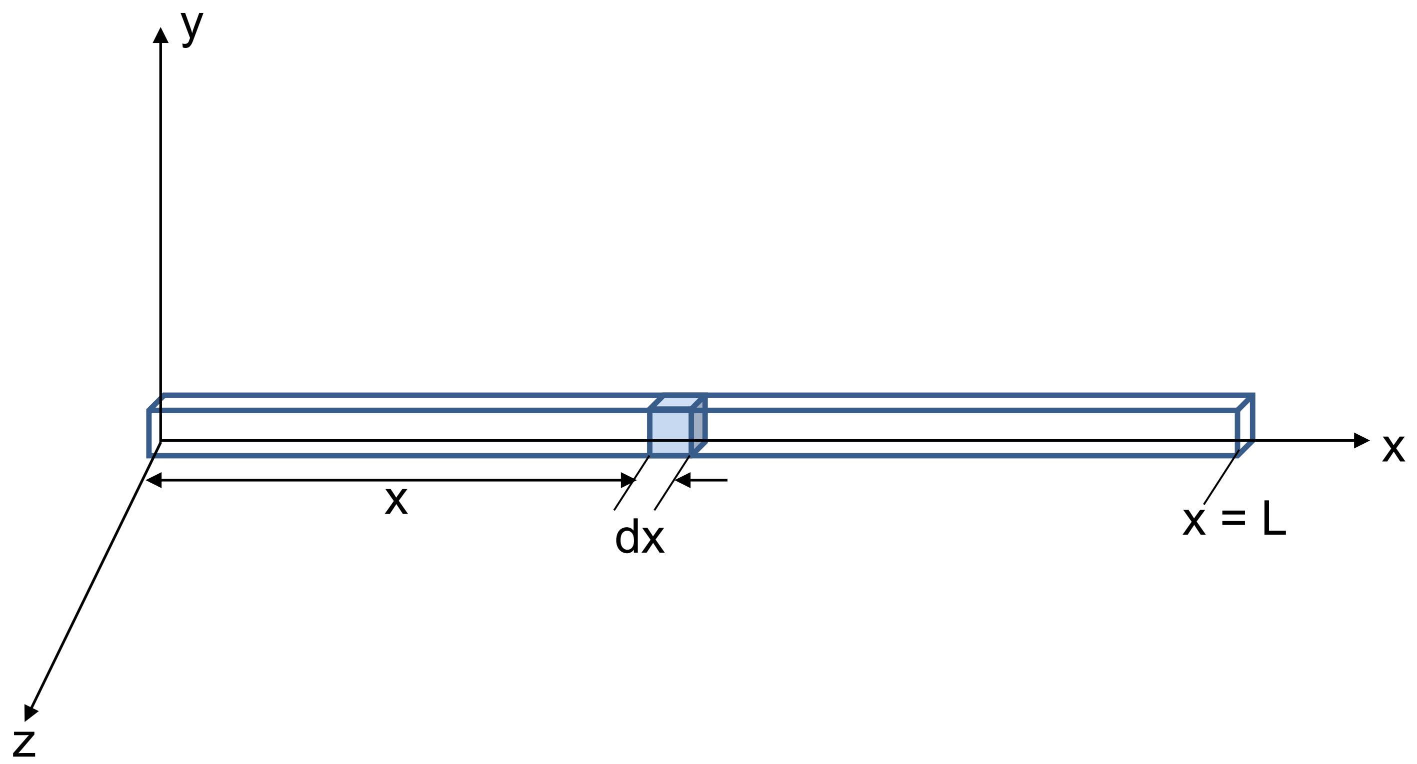
Solução. Ao longo do eixo y, temos:



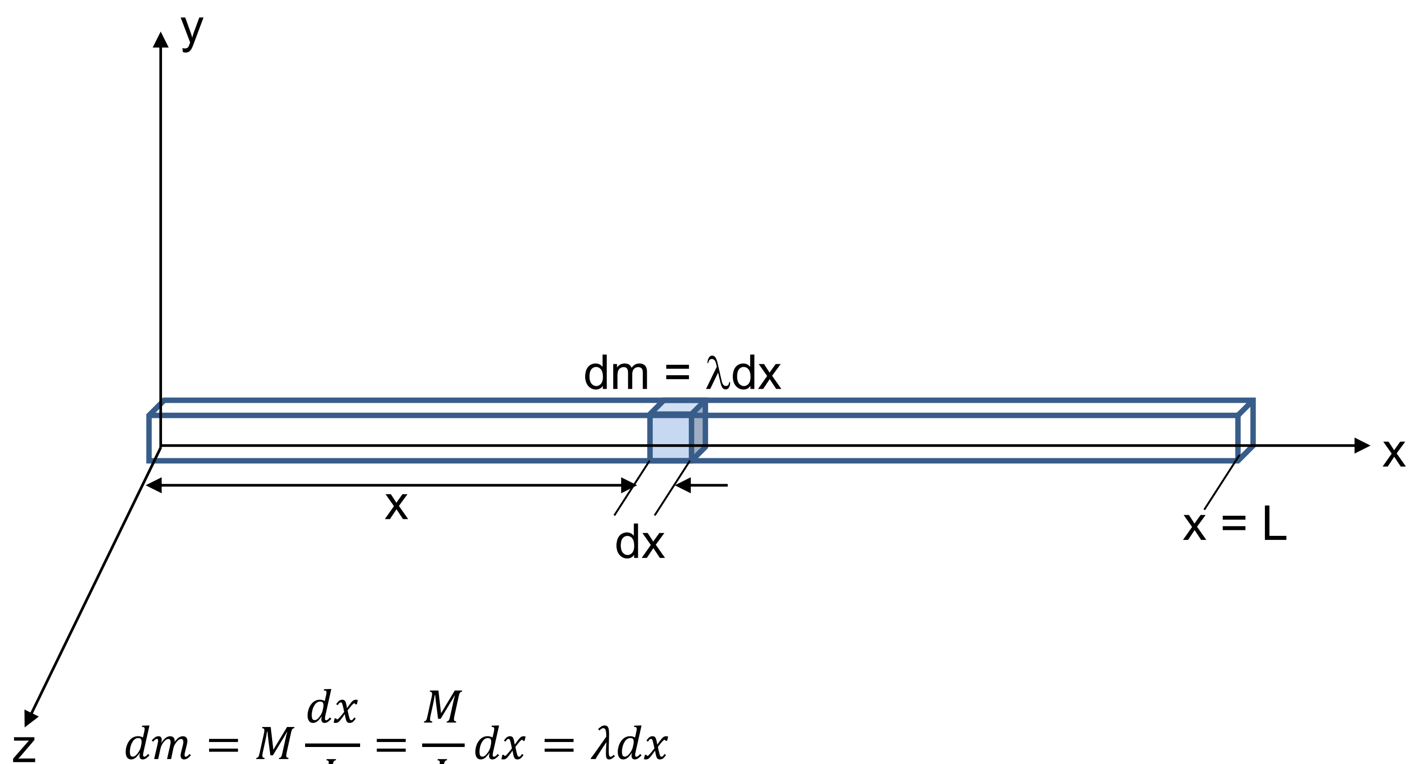
$MY_{cm} = m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C = 300.2+100.1+100.0 = 700$ g.cm => $Y_{cm} = 700/500 = 1,4$ cm

onde $M = m_A + m_B + m_C = 300$ g + 100 g + 100 g = 500 g

Exemplo 3. Achar o centro de massa de uma vareta de massa M e comprimento L.

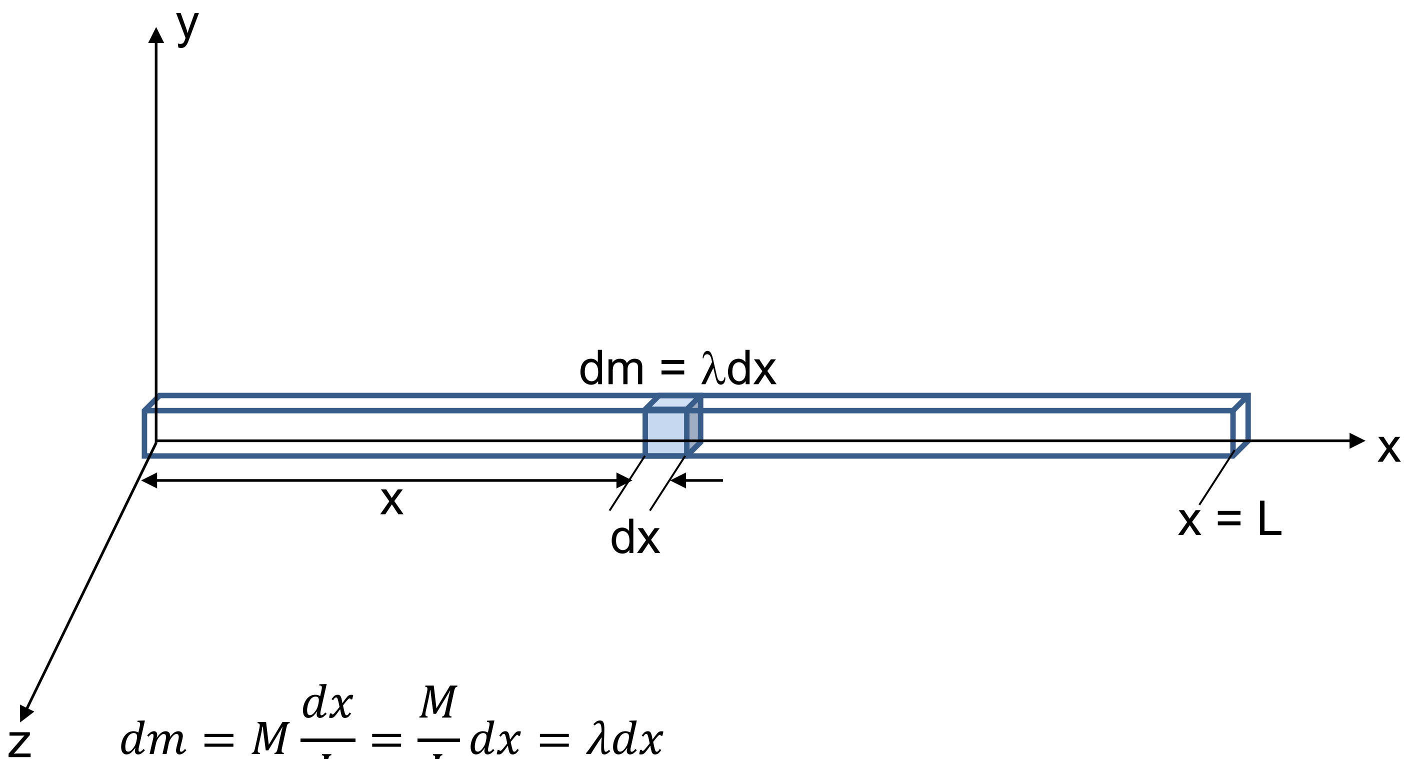


Solução. Consideremos a densidade linear representada por λ, onde $\lambda = M/L$. Temos que integrar o elemento de massa dm ao longo do eixo x, como indicado abaixo.



$$dm = M\frac{dx}{L} = \frac{M}{L}dx = \lambda dx$$

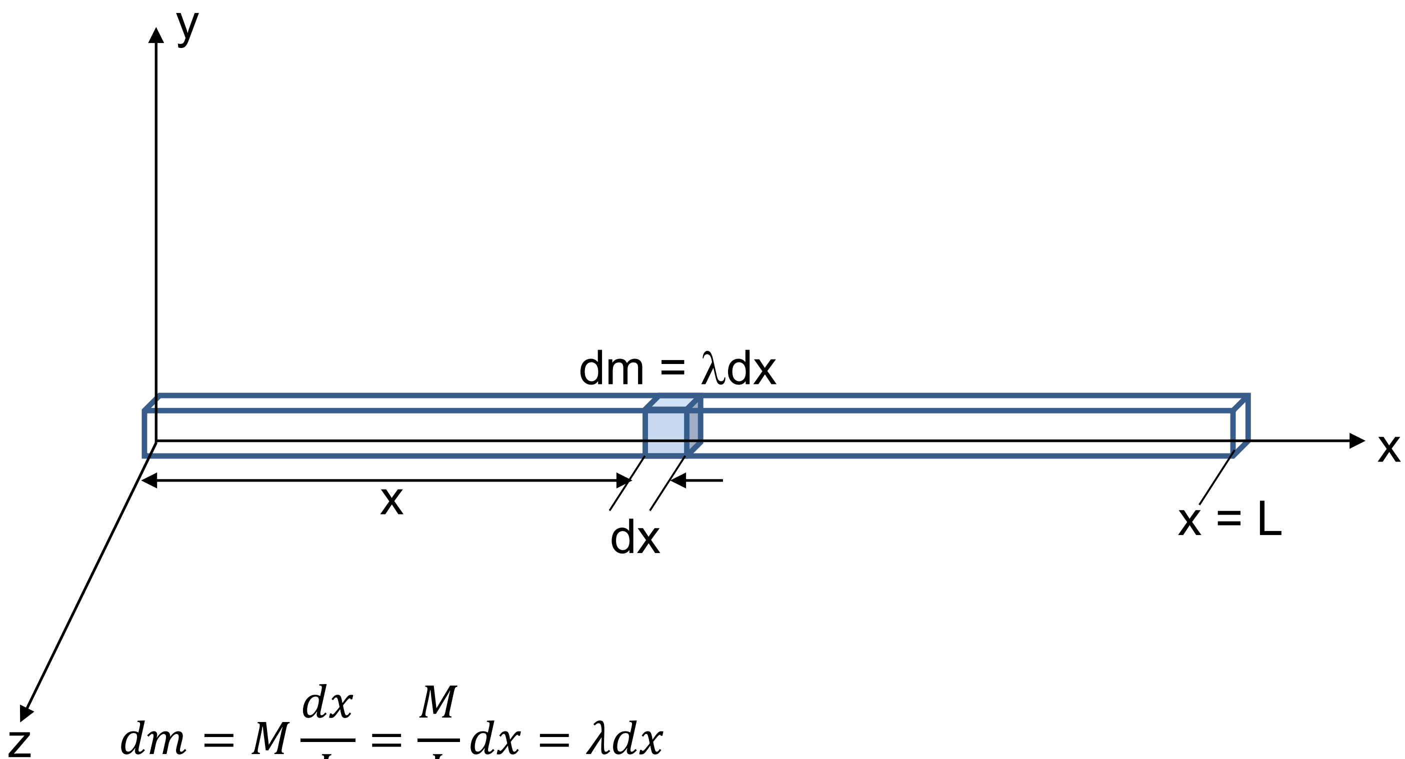
Solução. Desenvolvendo a integral, temos:



$$dm = M\frac{dx}{L} = \frac{M}{L}dx = \lambda dx$$

$$MX_{cm} = \int xdm = \int_0^L x\lambda dx = \lambda\int_0^L xdx$$

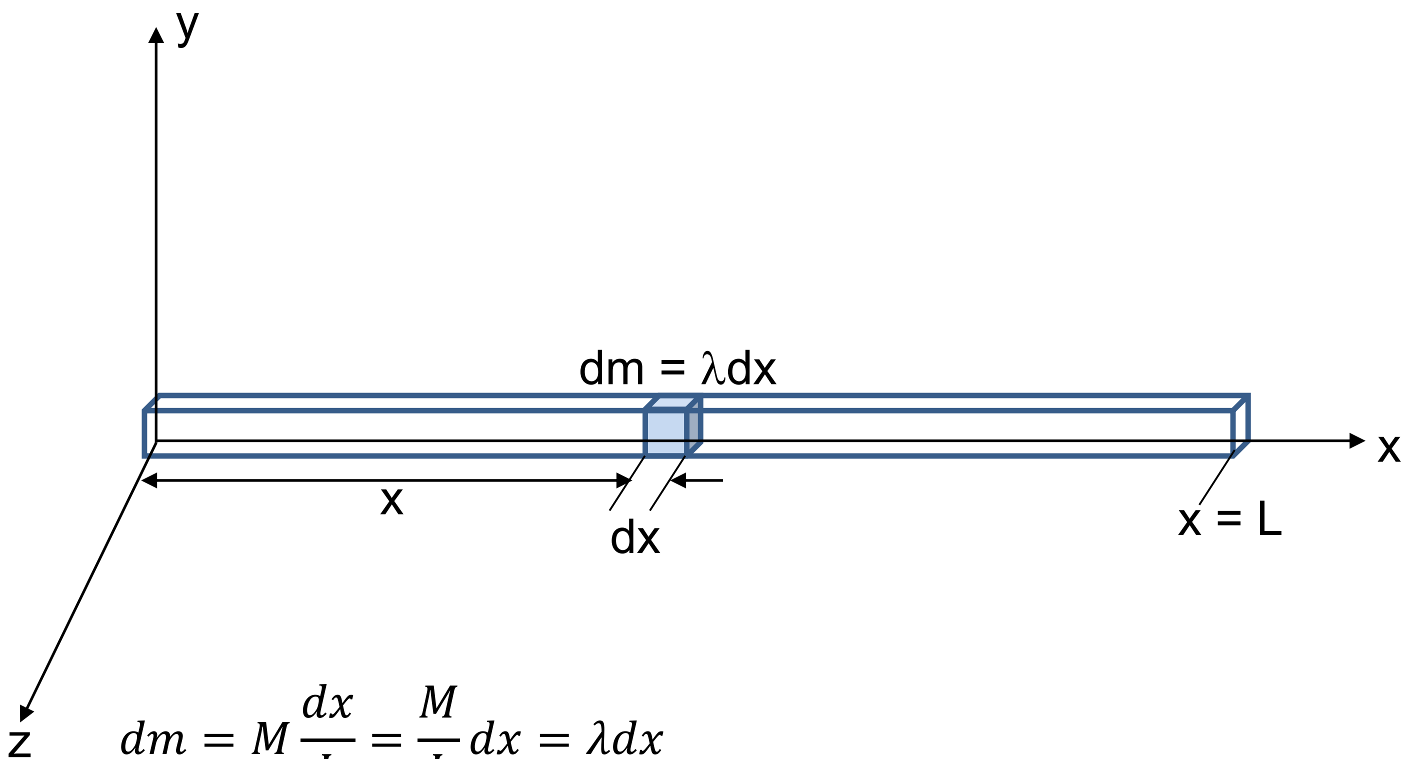
Solução. Resolvendo a integral, temos:



$$dm = M\frac{dx}{L} = \frac{M}{L}dx = \lambda dx$$

$$MX_{cm} = \int xdm = \int_0^L x\lambda dx = \lambda\int_0^L xdx = \lambda\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \lambda\frac{L^2}{2}$$

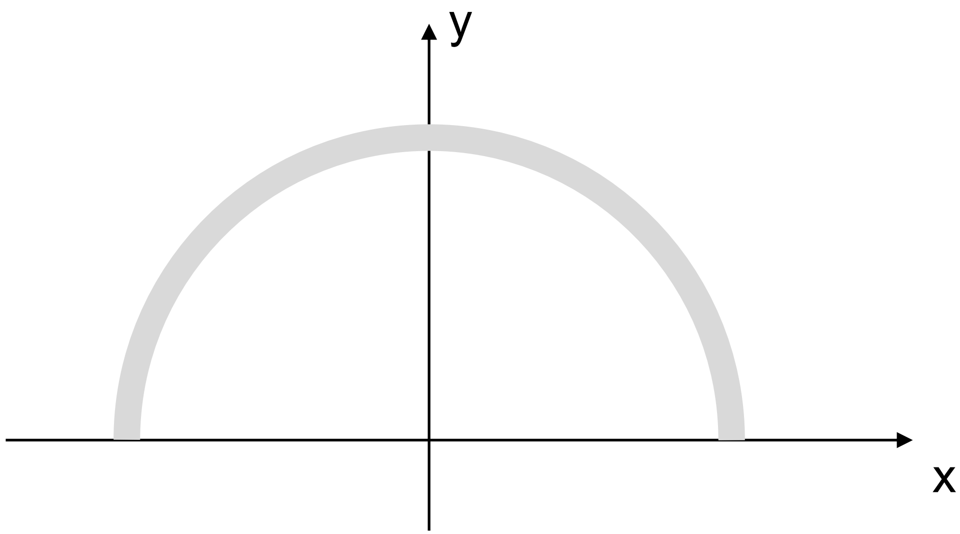
Solução. O valor da coordenada X_{cm} está indicado abaixo:



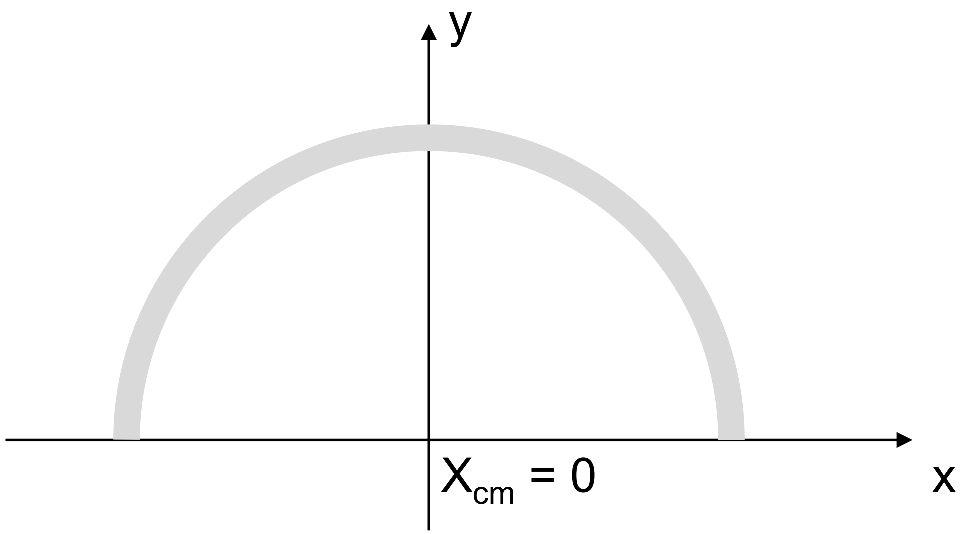
$$dm = M\frac{dx}{L} = \frac{M}{L}dx = \lambda dx$$

$$\boxed{X_{cm} = \lambda\frac{L^2}{2M} = \frac{M}{L}\frac{L^2}{2M} = \frac{L}{2}}$$

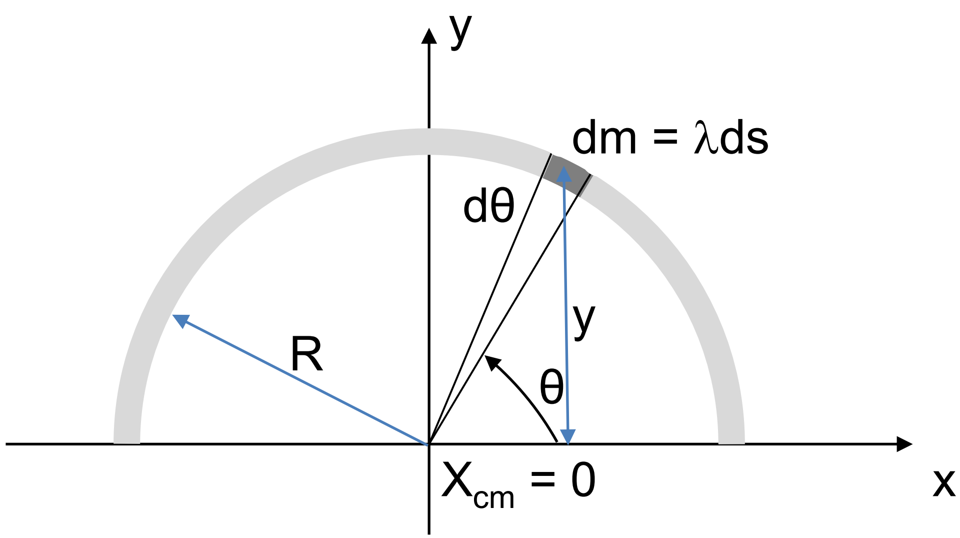
Exemplo 4. Achar o centro de massa de um aro semicircular de massa M e raio R. Escolha a origem sobre o eixo de simetria do aro (o eixo dos y).



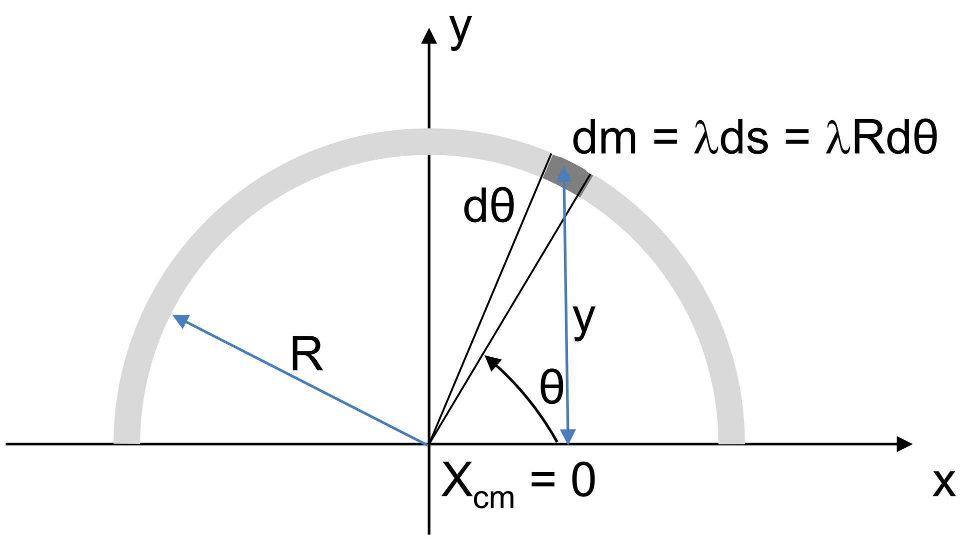
Solução. Pela simetria do aro, vemos que a coordenada X_{cm} é zero.



Solução. Para determinarmos a coordenada Y_{cm}, vamos considerar um elemento do aro ds com massa dm, como indicado abaixo.

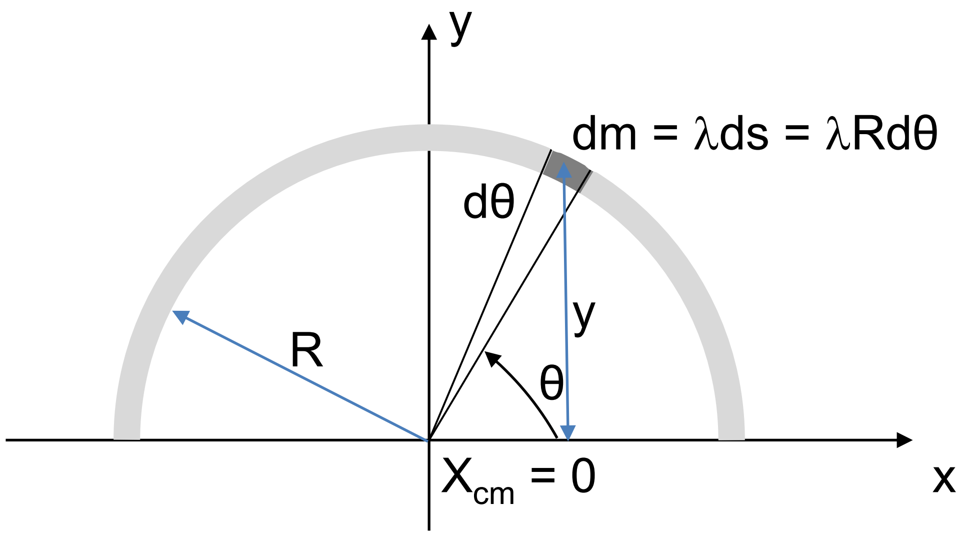


Solução. Analisando-se a geometria do sistema, temos:

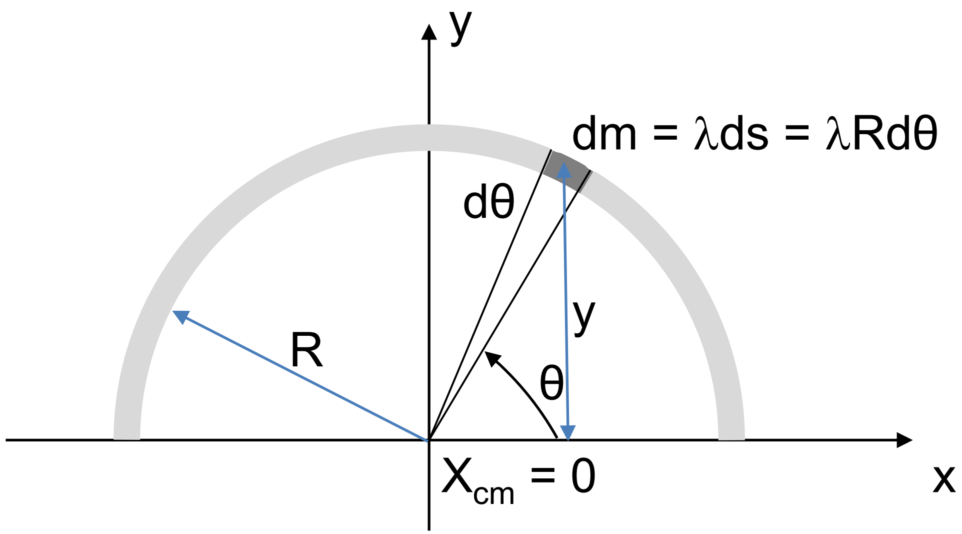


Solução. A coordenada y está relacionada com o raio R pela expressão:

$y = R\,\mathrm{sen}\theta$

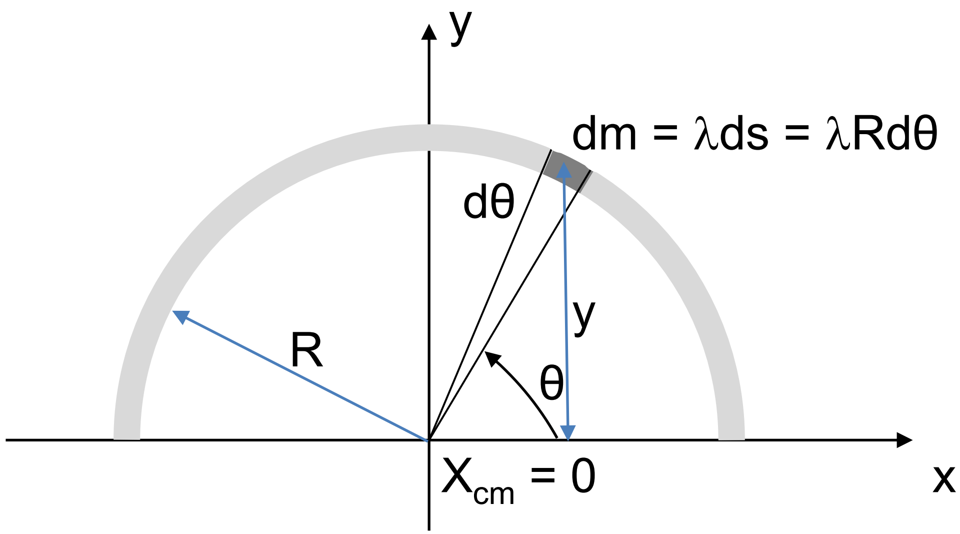


Solução. Integrando-se o elemento de massa dm, temos:



$$MY_{cm} = \int y dm = \int y\lambda ds = \int y\lambda R d\theta$$

Solução. Substituindo-se a igualdade y = Rsenθ na integral, e considerando-se os limites da integral entre 0 e π, temos:



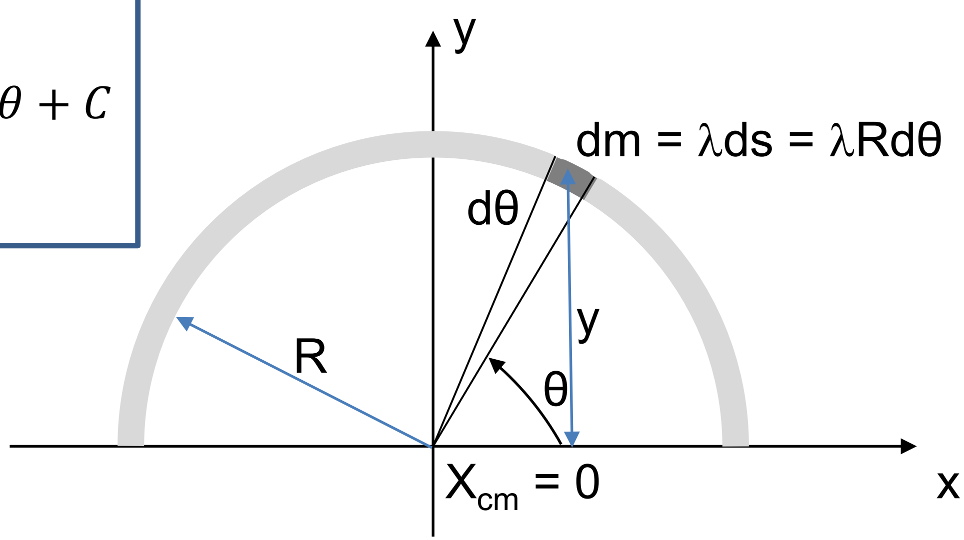
$$MY_{cm} = \int ydm = \int y\lambda ds = \int y\lambda Rd\theta$$

$$MY_{cm} = \int_0^{\pi} Rsen\theta\lambda Rd\theta = \lambda R^2 \int_0^{\pi} sen\theta d\theta$$

Solução. A partir da integral de senθ, temos:

Tabela de Integrais

$$\int sen\theta d\theta = -cos\theta + C$$



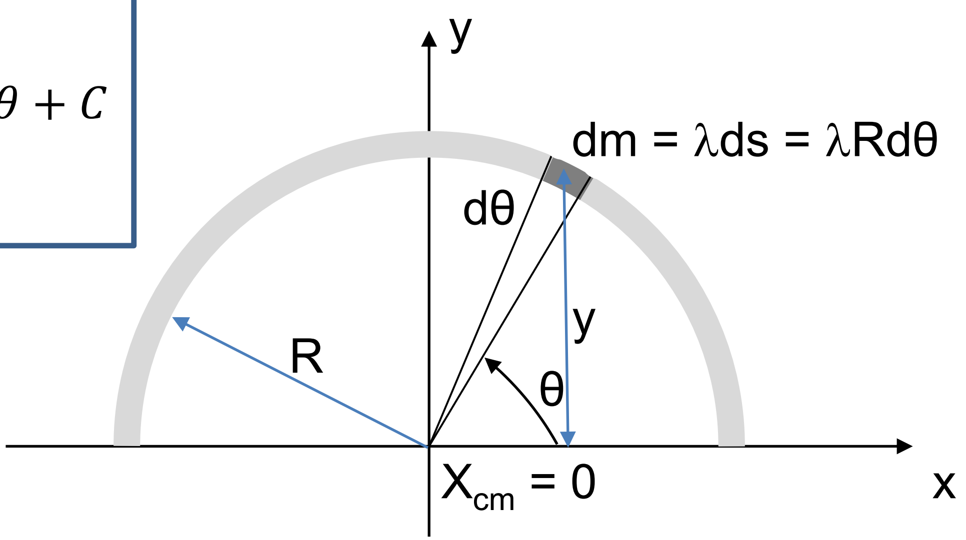
$$MY_{cm} = \int ydm = \int y\lambda ds = \int y\lambda R d\theta$$

$$MY_{cm} = \int_0^{\pi} Rsen\theta\lambda R d\theta = \lambda R^2 \int_0^{\pi} sen\theta d\theta$$

Solução. Resolvendo a integral nos limites indicados, temos o resultado abaixo.

Tabela de Integrais

$$\int sen\theta d\theta = -cos\theta + C$$



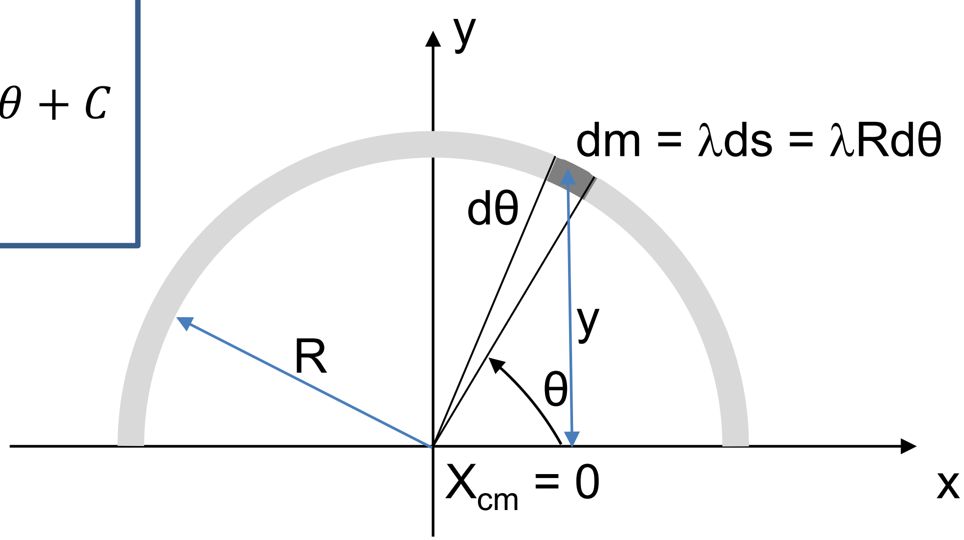
$$MY_{cm} = \int ydm = \int y\lambda ds = \int y\lambda Rd\theta$$

$$MY_{cm} = \int_0^{\pi} Rsen\theta\lambda Rd\theta = \lambda R^2 \int_0^{\pi} sen\theta d\theta = \lambda R^2(-cos\theta)\Big|_0^{\pi} = -\lambda R^2(-1-1) = 2\lambda R^2$$

Solução. Isolando Y_{cm}, temos:

Tabela de Integrais

$$\int sen\theta d\theta = -cos\theta + C$$



$$MY_{cm} = \int ydm = \int y\lambda ds = \int y\lambda Rd\theta$$

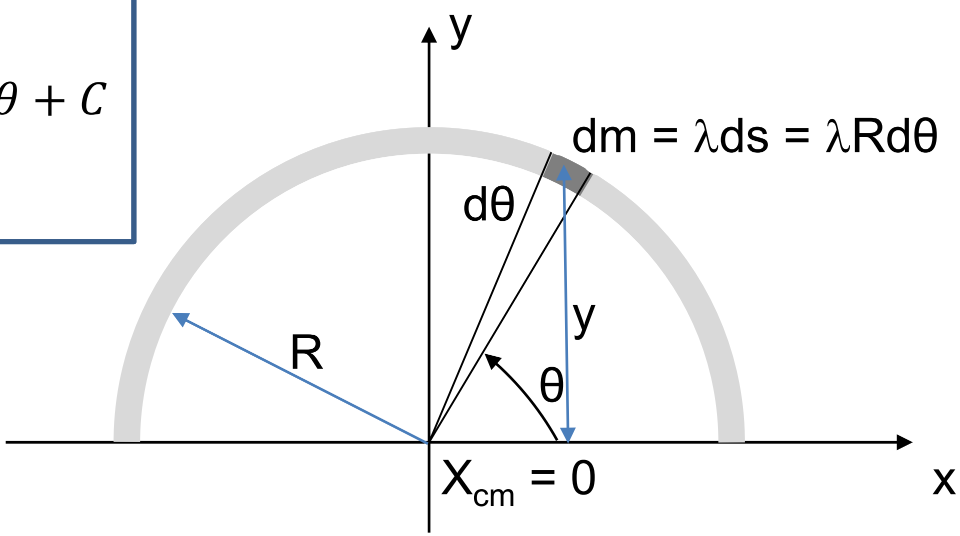
$$MY_{cm} = \int_0^{\pi} Rsen\theta\lambda Rd\theta = \lambda R^2 \int_0^{\pi} sen\theta d\theta = \lambda R^2(-cos\theta)\Big|_0^{\pi} = -\lambda R^2(-1-1) = 2\lambda R^2$$

$$Y_{cm} = \frac{2\lambda R^2}{M}$$

Solução. Uma vez que λ = M/(πR), temos:

Tabela de Integrais

$$\int sen\theta d\theta = -cos\theta + C$$



$$MY_{cm} = \int ydm = \int y\lambda ds = \int y\lambda R d\theta$$

$$MY_{cm} = \int_0^\pi Rsen\theta\lambda R d\theta = \lambda R^2 \int_0^\pi sen\theta d\theta = \lambda R^2(-cos\theta)\Big|_0^\pi = -\lambda R^2(-1-1) = 2\lambda R^2$$

$$Y_{cm} = \frac{2\lambda R^2}{M} = \frac{2MR^2}{\pi RM} = \boxed{\frac{2R}{\pi}}$$

TIPLER, P. A. & MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros. Vol. 1. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2012., 759 pp.

Última atualização em: 10 de maio de 2018.