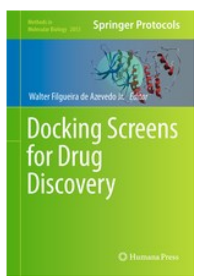
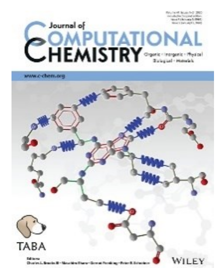
Classificação de Equações Diferenciais

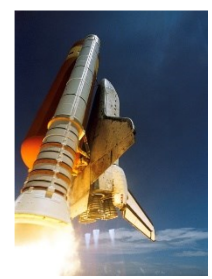
Prof. Dr. Walter F. de Azevedo, Jr.

walter@azevedolab.net

Biography 01♥
Biography 02♥
Biography 03♥
Biography 04♥

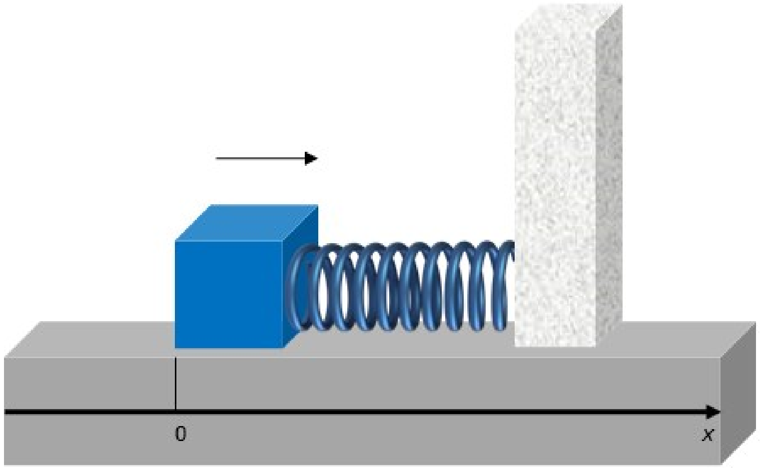






Resumo

Nesta aula veremos as classificações de equações diferenciais. Essa informação será útil no direcionamento dos métodos que usaremos para resolução das equações diferenciais. Iremos fazer a resolução do sistema massa-mola onde resolveremos a por integração direta fazendo uso de substituição trigonométrica. Destaco uma aplicação do sistema massa-mola para estudar as interações intermoleculares envolvendo proteínas e fármacos.



Sistema massa-mola

Palavras-chave: Física; modelagem de sistemas; abstração; modelagem matemática; equação diferencial; equação diferencial linear; separação de variáveis; substituição trigonométrica; problema de valor inicial; valores de contorno; segunda lei de Newton; sistema massa-mola, aprendizado de máquina.

Quando modelamos um sistema a partir de uma equação que envolve derivadas, temos uma equação diferencial, como a indicada abaixo.

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

Na equação acima temos a taxa de variação de *x* com relação ao tempo que depende da velocidade inicial (v_0) e do tempo (*t*) multiplicado por uma constante (a aceleração). A variável *x* é chamada variável dependente e a variável *t* é a variável independente. As constantes *a* e v_0 são os coeficientes da equação diferencial.

A equação diferencial a seguir tem a variável dependente *u* em função das variáveis independentes *x* e *y*.

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$$

As equações que envolvem somente uma variável independente são **equações diferenciais ordinárias**. Quando temos mais de uma variável independente, temos uma **equação diferencial parcial**, como a indicada acima.
A ordem da equação diferencial é dada pela mais alta derivada. A equação abaixo é de segunda ordem. As duas equações anteriores são de primeira ordem.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a$$

Outra característica que analisamos nas equações diferenciais é a **linearidade da variável dependente**. Consideremos que a variável dependente seja *y*, se não temos na equação grau maior que um para a variável dependente (*y*), dizemos que a equação diferencial é **linear**. Qualquer outro grau maior que um, classifica a equação diferencial como **não linear**. No exemplo abaixo, temos uma **equação diferencial ordinária de segunda ordem não linear com variável dependente *y* e variável independente *x***.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y^3 = 0$$

Ela é não linear devido ao termo y^3.
A equação a seguir é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem com

$$t^3\frac{dx}{dt} = t^3 + x$$

Veja que não temos para *x* grau maior que um. Para a variável independente (*t*), podemos ter qualquer grau. O que define a linearidade é o grau da variável dependente.

A seguir temos uma série de equações diferenciais. Usando a notação vista, identifique as variáveis dependente e independente e as classifique. Use o exemplo resolvido como modelo.

Equação Diferencial	$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$
Variável dependente	*y*
Variável independente	*x*
Tipo	EDO
Ordem	Segunda
Linearidade da variável dependente	Linear

EDO: Equação diferencial ordinária
EDP: Equação diferencial parcial

Equação Diferencial	$5\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 9x = 2\cos 3t$
Variável dependente	
Variável independente	
Tipo	
Ordem	
Linearidade da variável dependente	

EDO: Equação diferencial ordinária
EDP: Equação diferencial parcial

Equação Diferencial	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
Variável dependente	
Variáveis independentes	
Tipo	
Ordem	
Linearidade da variável dependente	

EDO: Equação diferencial ordinária
EDP: Equação diferencial parcial

Equação Diferencial	$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2-3x)}{x(1-3y)}$$
Variável dependente	
Variável independente	
Tipo	
Ordem	
Linearidade da variável dependente	

EDO: Equação diferencial ordinária
EDP: Equação diferencial parcial

Equação Diferencial	$\frac{dx}{dt} = k(4-x)(1-x)$ onde k é constante
Variável dependente	
Variável independente	
Tipo	
Ordem	
Linearidade da variável dependente	

EDO: Equação diferencial ordinária
EDP: Equação diferencial parcial

Equação Diferencial	$y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=C$ onde C é constante
Variável dependente	
Variável independente	
Tipo	
Ordem	
Linearidade da variável dependente	

EDO: Equação diferencial ordinária
EDP: Equação diferencial parcial

Equação Diferencial	$\sqrt{1-y}\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} = 0$
Variável dependente	
Variável independente	
Tipo	
Ordem	
Linearidade da variável dependente	

EDO: Equação diferencial ordinária
EDP: Equação diferencial parcial

Equação Diferencial	$\frac{dp}{dt} = kp(P - p)$ onde k e P são constantes
Variável dependente	
Variável independente	
Tipo	
Ordem	
Linearidade da variável dependente	

EDO: Equação diferencial ordinária
EDP: Equação diferencial parcial

Equação Diferencial	$8\frac{d^4y}{dx^4} = x(1-x)$
Variável dependente	
Variável independente	
Tipo	
Ordem	
Linearidade da variável dependente	Linear

EDO: Equação diferencial ordinária
EDP: Equação diferencial parcial

Equação Diferencial	$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+xy=0$
Variável dependente	
Variável independente	
Tipo	
Ordem	
Linearidade da variável dependente	

EDO: Equação diferencial ordinária
EDP: Equação diferencial parcial

Equação Diferencial	$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial N}{\partial r} + kN$ onde k é constante
Variável dependente	
Variáveis independentes	
Tipo	
Ordem	
Linearidade da variável dependente	

EDO: Equação diferencial ordinária
EDP: Equação diferencial parcial

Equação Diferencial	$\frac{d^2y}{dx^2} - 0{,}1(1 - y^2)\frac{dy}{dx} + 9y = 0$
Variável dependente	
Variável independente	
Tipo	
Ordem	
Linearidade da variável dependente	

EDO: Equação diferencial ordinária
EDP: Equação diferencial parcial

Notação

As expressões y', y'', y''', $y^{(4)}$,..., $y^{(n)}$ normalmente representam as derivadas primeira, segunda, terceira, quarta,...,enésima de y em relação à variável independente considerada. Assim, y'' representa d^2y/dx^2 se a variável independente for x, mas representa d^2y/dp^2 se a variável independente for p.

Observe o uso dos parênteses em $y^{(n)}$ para distingui-la da enésima potência, y^n. Se a variável independente for o tempo (t), as linhas são, em geral, substituídas por pontos. Assim, $\ddot{y}$ representa d^2y/dt^2.

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \qquad y''' = \frac{d^3y}{dp^3}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \dddot{x} = \frac{d^3x}{dt^3}$$

Uma solução de uma equação diferencial na variável dependente y (função incógnita y) e na variável independente x no intervalo I é uma função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial identicamente para todo x em I.

Exemplo 1: $y(x) = c_1 \, sen \, 2x + c_2 \cos 2x$, com constantes arbitrárias c_1 e c_2, é solução de $y'' + 4y = 0$?

Solução

$$y' = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \, sen \, 2x$$
$$y'' = -4c_1 \, sen \, 2x - 4c_2 \cos 2x$$

Substituindo-se na equação diferencial, temos o seguinte resultado.

$$-4c_1 \, sen \, 2x - 4c_2 \cos 2x + 4(c_1 \, sen \, 2x + c_2 \cos 2x) =$$

$$-4c_1 \, sen \, 2x - 4c_2 \cos 2x + 4c_1 \, sen \, 2x + 4c_2 \cos 2x = 0$$

Provamos que $y(x) = c_1 \, sen \, 2x + c_2 \cos 2x$ satisfaz a equação diferencial para todos os valores de x e é uma solução no intervalo $(-\infty, \infty)$.

A solução : $y(x) = c_1 \, sen \, 2x + c_2 \cos 2x$ é uma **solução geral da equação diferencial**.

Se fixarmos os valores de $c_1 = 5$ e $c_2 = -3$, temos uma **solução particular da equação diferencial ($y(x) = 5sen \, 2x - 3\cos 2x$)**.

Exemplo 2: Mostre que $y = \ln x$ é solução de $xy'' + y' = 0$ em $I = (0, \infty)$, mas não é solução em $I = (-\infty,\infty)$.

Solução

$y' = 1/x$ e $y'' = -1/x^2$

Substituindo-se na equação diferencial, temos o seguinte resultado.

$x(-1/x^2) + 1/x = -1/x + 1/x = 0$

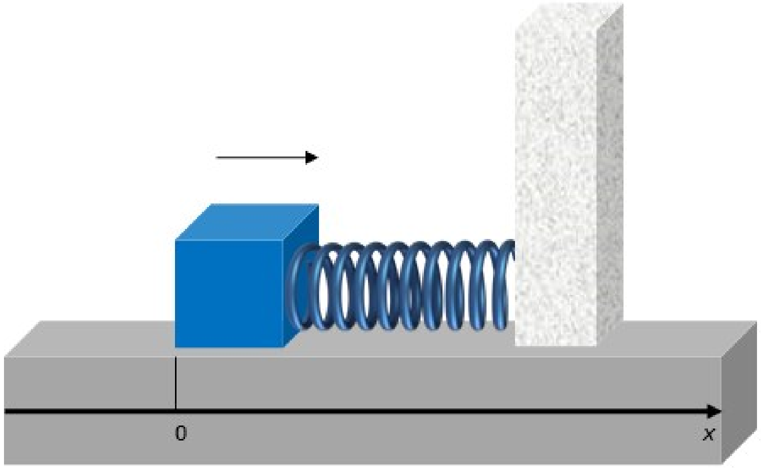
Assim, $y = \ln x$ *é* solução em $(0,\infty)$. Note que $y = \ln x$ não pode ser solução em $(-\infty, \infty)$, pois o logaritmo não é definido para números negativos e zero.

Uma equação diferencial juntamente com condições auxiliares sobre a função incógnita (variável dependente) e suas derivadas (todas especificadas para o mesmo valor da variável independente), constituem um **problema de valores iniciais**. As condições auxiliares são **condições iniciais**. Se as condições auxiliares são especificadas para mais de um valor da variável independente, temos um **problema de valores de contorno** e as condições são **condições de contorno**.

Exemplo 3: O problema $y'' + 2y' = e^x$; $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 2$ é um problema de valores iniciais porque as duas condições auxiliares são especificadas para $x = \pi$. O problema $y'' + 2y' = e^x$; $y(0) = 1$, $y(1) = 1$ é um problema de valores de contorno, pois ambas as condições auxiliares são especificadas para valores distintos $x = 0$ e $x = 1$.

Uma solução de um problema de valores iniciais ou de valores de contorno é uma função $y(x)$ que, simultaneamente, resolve a equação diferencial e satisfaz todas as condições auxiliares especificadas.

Exemplo 4: Sistema massa-mola



Resumo do Sistema Massa-Mola

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \qquad F(x_0) = 0$$

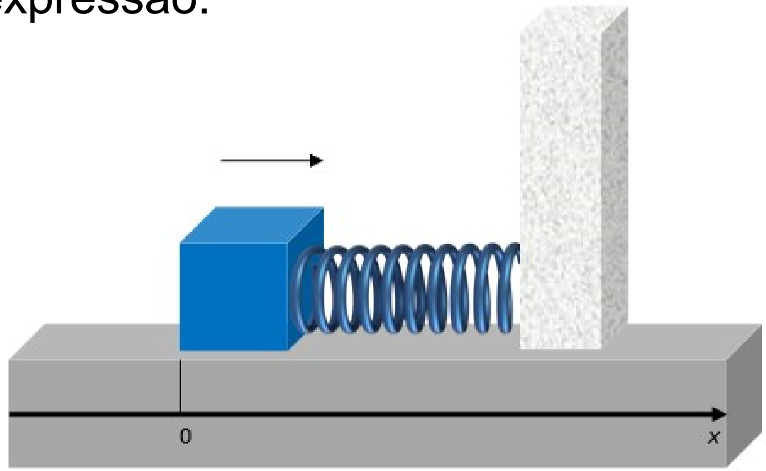
$$F(x) = -kx \qquad U'(x_0) = \frac{dU(x_0)}{dx} = 0$$

No sistema massa-mola temos uma massa ligada a uma mola, que está fixa numa das extremidades e ligada a um bloco que está apoiado numa superfície sem atrito. O bloco oscila sem atrito. A mola tem **constante elástica** k. Quando o bloco está na posição x_o, a **força elástica da mola** ($F(x)$) é zero ($F(x_0) = 0$).

Determine a expressão para posição $x(t)$ para a massa do sistema massa-mola.

Use 2ª lei de Newton.

Aplicando-se a segunda lei de Newton ao sistema massa-mola, temos a seguinte expressão.



$$\sum F_{res} = ma$$

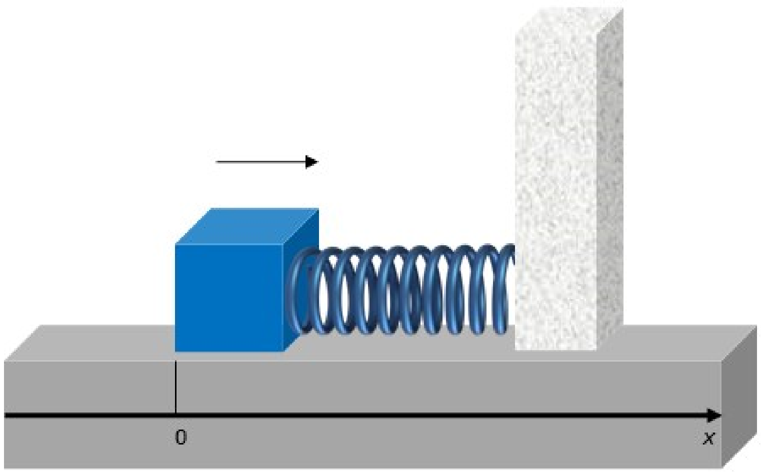
(Segunda Lei de Newton)

Indicando a força exercida pela mola, temos o seguinte resultado.

$$-kx = ma$$

k: constante elástica da mola (*N/m*)
m: massa (Kg)
a: aceleração (m/s^2)

A partir da segunda lei de Newton, temos a seguinte equação diferencial.



$$-kx = ma \rightarrow m\frac{dv}{dt} = -kx$$

Temos a seguinte equação diferencial para o sistema massa-mola.

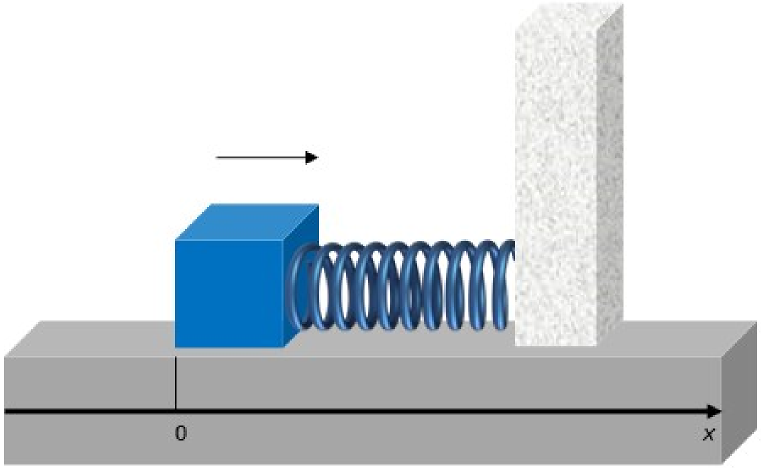
$$m\frac{dv}{dt} = -kx \rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x} \quad \text{(Equação 1)}$$

Podemos usar a seguinte relação:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dx}\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx}$$

Ou seja, temos a seguinte expressão para a derivada da velocidade em relação ao tempo.

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}} \quad \text{(Equação 2)}$$



Podemos substituir a equação 1 na equação 2, como segue.

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x}$$ (Equação 1)

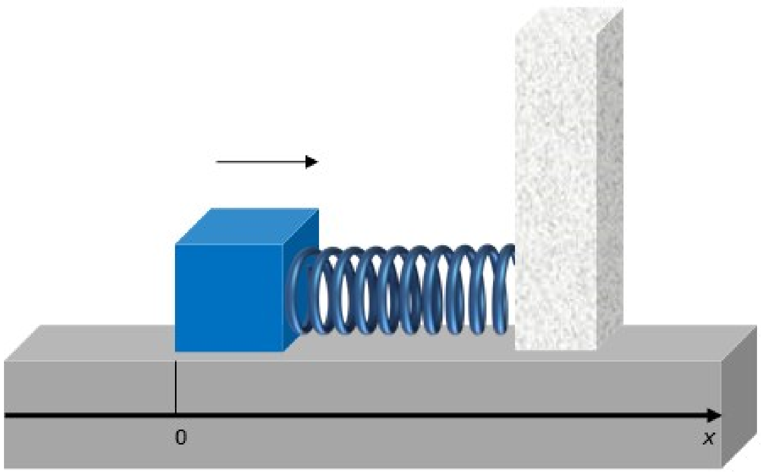
$$\boxed{\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}}$$ (Equação 2)

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m}x \rightarrow \boxed{vdv = -\frac{k}{m}x\mathrm{dx}}$$

Integramos ambos os lados da equação acima,

$$\int_0^v vdv = -\frac{k}{m}\int_{x_0}^x xdx \rightarrow \frac{v^2}{2} = -\frac{kx^2}{2m} + \frac{kx_0^2}{2m}$$

$$\boxed{v^2 = \frac{k}{m}(x_0^2 - x^2)}$$



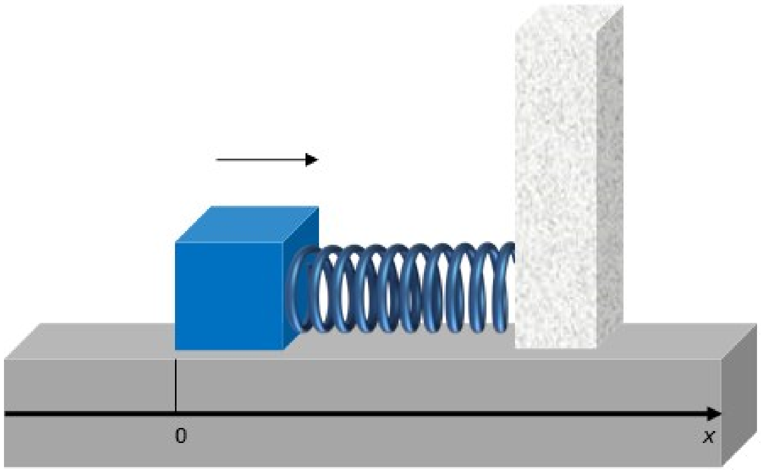
Mais algumas manipulações, chegamos a uma nova expressão.

$$\boxed{v^2 = \frac{k}{m}(x_0^2 - x^2)} \qquad v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x^2)}$$

$$\boxed{v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{(x_0^2 - x^2)}}$$

A nova equação diferencial tem a seguinte forma:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{(x_0^2 - x^2)}} \qquad \text{(Equação 3)}$$

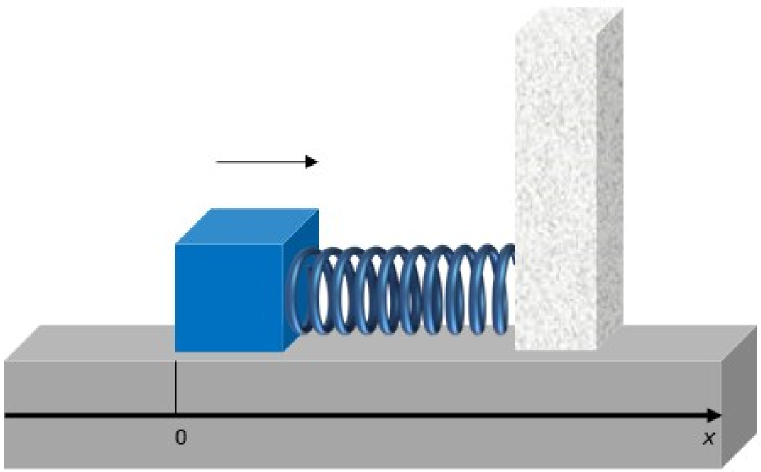


Agora resolvemos a nova equação diferencial.

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\sqrt{(x_0^2 - x^2)}}}$$ (Equação 3)

Isolando-se as variáveis, temos a seguinte expressão:

$$\boxed{\frac{dx}{\sqrt{(x_0^2 - x^2)}} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}dt}$$ (Equação 4)



Para resolver a integral, usamos uma substituição trigonométrica $x = x_0 cos\theta$.

$$dx = -x_0 \sin\theta \, d\theta \qquad \text{(Equação 5)}$$

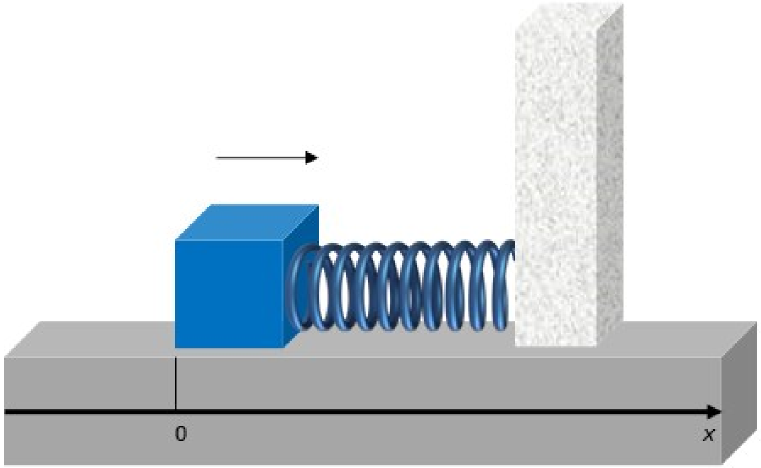
$$\boxed{\frac{dx}{\sqrt{(x_0^2 - x^2)}} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}dt} \qquad \text{(Equação 4)}$$

Substituindo-se a equação (5) na equação (4), temos a seguinte expressão.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x_0^2 - x^2)}} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\int_0^t dt \qquad \int_0^{\theta} \frac{-x_0 \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{(x_0^2 - x_0^2(\cos\theta)^2)}} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$-\int_0^{\theta} d\theta = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}t \rightarrow \boxed{\theta = \mp\sqrt{\frac{k}{m}}t} \ \text{(Equação 6)}$$

Usamos: $x_0\sqrt{1 - (\cos\theta)^2} = x_0 \sin\theta$



Inserimos a equação 6 na substituição trigonométrica ($x = x_0 cos\theta$) e chegamos ao seguinte resultado.

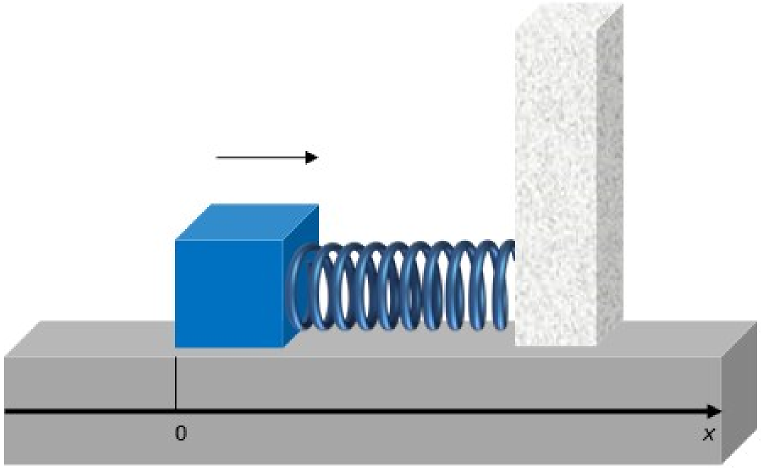
$$\boxed{\theta = \mp\sqrt{\frac{k}{m}}t} \quad \text{(Equação 6)}$$

$$x = x_0 \cos\theta = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

A solução da equação diferencial é a seguinte expressão.

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)}$$

Sistema massa-mola com energia potencial elástica *U(x)*.



Resumo do Sistema Massa-Mola

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \qquad F(x_0) = 0$$

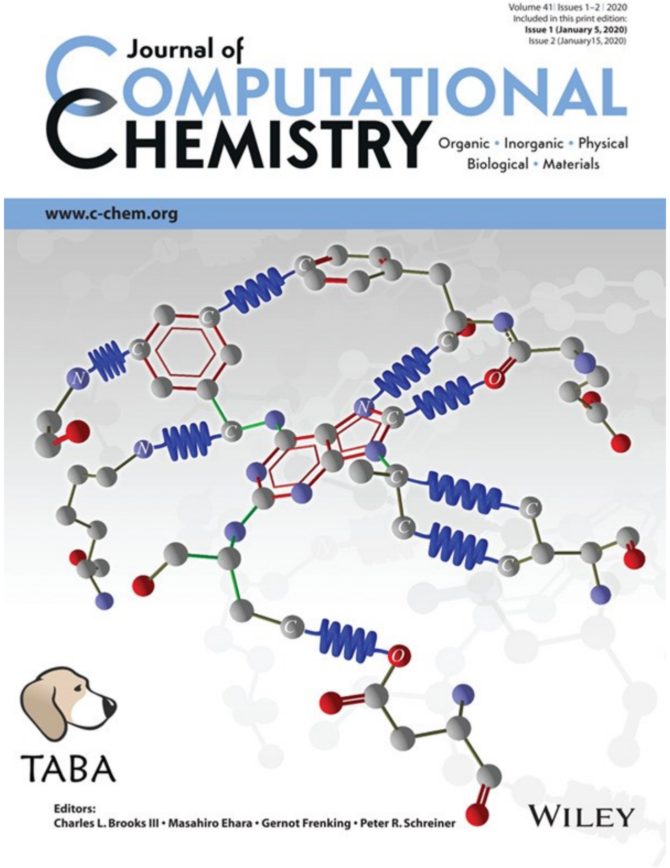
$$F(x) = -kx \qquad U'(x_0) = \frac{dU(x_0)}{dx} = 0$$

Resumindo-se, para o nosso sistema massa-mola a posição *x(t)* da massa *m* tem a expressão indicada à direita.

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x}$$

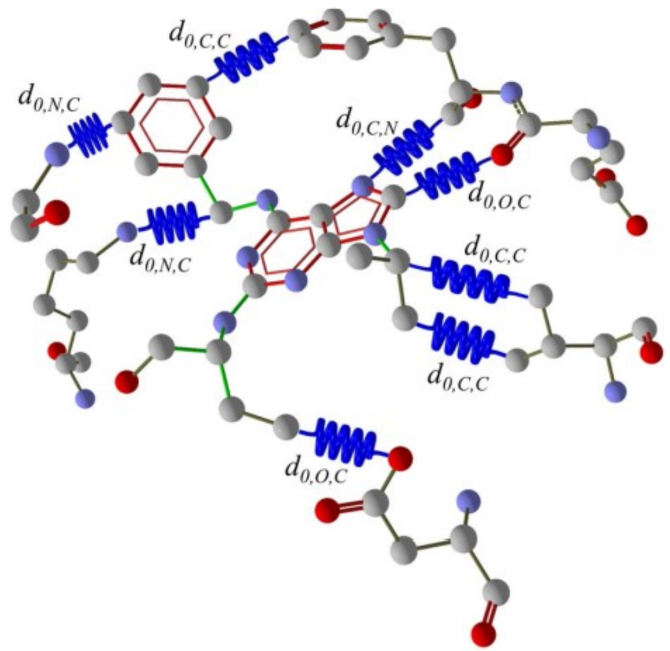
$$\boxed{x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)}$$

Foi usando o sistema massa-mola simples que propusemos em 2020 um programa de aprendizado de máquina que considera que as interações entre fármacos e proteínas podem ser representadas por pequenas molas ligando os átomos do fármaco aos da proteína (da Silva AD et al., 2020). O artigo teve grande repercussão e foi aceito para ser capa da revista científica *Journal of Computational Chemistry*, mostrada abaixo.



Referência:
da Silva AD, Bitencourt-Ferreira G, de Azevedo WF Jr. Taba: A Tool to Analyze the Binding Affinity. J Comput Chem. 2020 Jan 5;41(1):69-73. doi: 10.1002/jcc.26048. Epub 2019 Aug 13. PMID: 31410856.

Na figura abaixo vemos o sítio ativo de uma proteína interagindo com um fármaco. As interações de cada átomo do fármaco podem ser modeladas como um sistema massa-mola. Podemos imaginar minúsculas molas representando as interações em cada par de átomos, onde um átomo pertence à proteína e outro fica no fármaco. As distâncias indicadas próximas das molas representam as distâncias de equilíbrio da mola.



Referência:
da Silva AD, Bitencourt-Ferreira G, de Azevedo WF Jr. Taba: A Tool to Analyze the Binding Affinity. J Comput Chem. 2020 Jan 5;41(1):69-73. doi: 10.1002/jcc.26048. Epub 2019 Aug 13. PMID: 31410856.

1. Determine se $y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$ é uma solução de $y'' + 2y' + y = 0$.

2. Mostre que $y = 1/(x^2 - 1)$ é solução de $y' + 2xy^2 = 0$ em $I = (-1, 1)$, mas não é solução em nenhum outro intervalo maior contendo I.

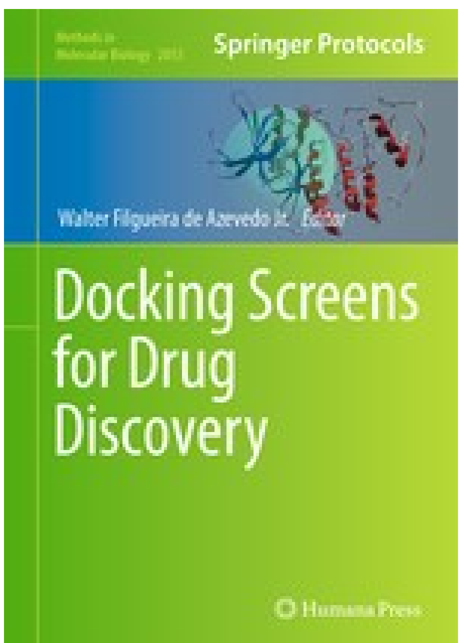
3. Determine se qualquer uma das funções (a) $y_1 = sen\ 2x$, (b) $y_2(x) = x$ ou (c) $y_3 = (1/2)\ sen\ 2x$ é solução do problema de valor inicial $y'' + 4y = 0$; com $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

4. Determine uma solução para o problema de valores de contorno $y'' + 4y = 0$; $y(\pi/8) = 0$, $y(\pi/6) = 1$, considerando a solução geral da equação diferencial como sendo $y(x) = c_1\ sen\ 2x + c_2 \cos 2x$.

5. Especifique uma solução para o problema de valores de contorno $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 2$ considerando a solução geral da equação diferencial como sendo $y(x) = c_1\ sen\ 2x + c_2 \cos 2x$.

6. Determine c_1 e c_2 de modo que $y(x) = c_1\ sen\ 2x + c_2 \cos 2x + 1$ satisfaça as condições $y(\pi/8) = 0$, $y'(\pi/8) = \sqrt{2}$.

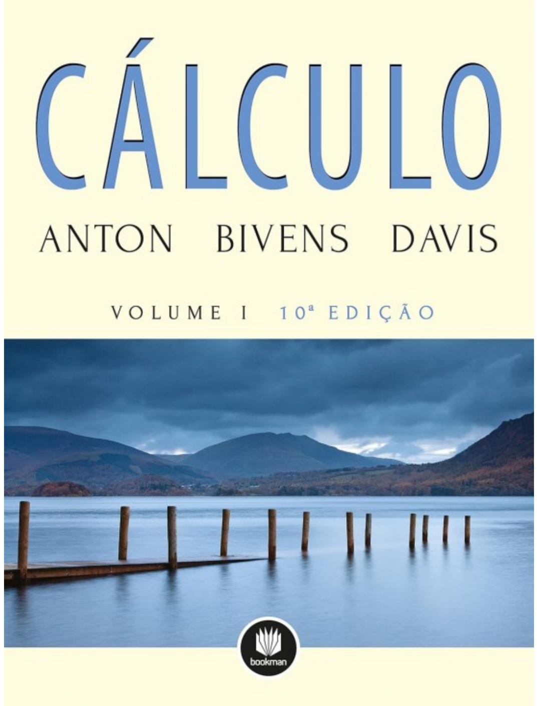
7. Determine c_1 e c_2 de modo que $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + 2\ sen\ x$ satisfaça as condições $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

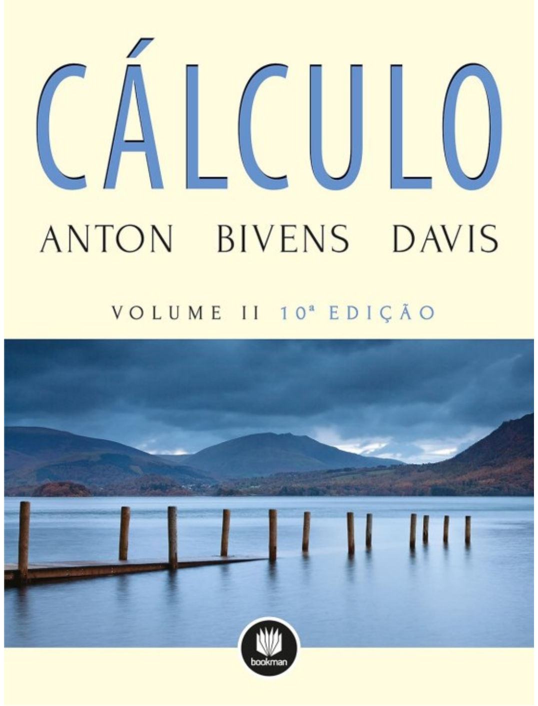


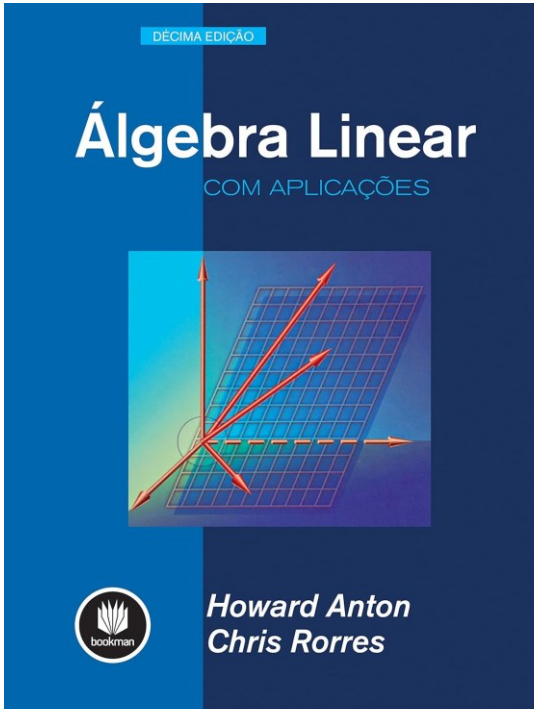
Dr. Walter F. de Azevedo, Jr. earned a BSc in Physics (1990), an MSc in Applied Physics (1992), and a DSc in Applied Physics (1997) from the University of São Paulo (Brazil). In his doctoral studies, Dr. Azevedo worked under the supervision of Prof. Yvonne Primerano Mascarenhas (University of São Paulo) and Prof. Sung-Hou Kim (University of California, Berkeley) on a split Doctoral program with a fellowship from the Brazilian Research Council (CNPq). During his first two years at Berkeley, he was under a CNPq fellowship (1993-95). Due to his performance, Prof. S.-H. Kim hired him as Visiting Researcher for the Department of Chemistry, University of California at Berkeley (1995-96).

The work developed during these three years at Berkeley resulted in his thesis about the structure of Cyclin-Dependent Kinase 2 (CDK2) in complex with inhibitors (PDB access code: 2A4L) (de Azevedo et al., 1996; de Azevedo et al., 1997). Dr. Azevedo is the first author of both papers, and these publications gathered more than 1,000 citations on the Web of Science. During 1997-98 he had a postdoc position at São Paulo State University (Unesp) with a Fapesp fellowship. He holds a habilitation degree in Physics (livre-docência) from the São Paulo State University (Unesp)(2004). In 1998, Dr. Azevedo participated in a research project with NASA that sent proteins to crystallize in a microgravity environment onboard the Space Shuttle Discovery (STS-95). This research had coverage of Brazilian TV networks. He published a book entitled "Docking Screens for Drug Discovery" with Springer Nature in 2019. This book sold 46,000 copies (April 2024) with over 2 million dollars in sales (https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4939-9752-7). In 2020, the Journal Plos Biology ranked Dr. Azevedo among the most influential researchers in the world (Fields: Biochemistry & Molecular Biology and Biophysics).

Dr. Azevedo has vast editorial experience. He is the frontiers section editor (Bioinformatics/Biophysics) for the Current Drug Targets, section editor (Bioinformatics in Drug Design and Discovery) for the Current Medicinal Chemistry, review editor for Frontiers in Chemistry, associate editor for Exploration of Drug Science, member of the editorial boards Molecular Diversity and the Journal of Molecular Structures, and editor of Docking Screens for Drug Discovery (Methods of Molecular Biology)-Springer Nature. He is a reviewer for over 60 high-impact journals, including Nature Communications and Briefings in Bioinformatics. His research interests are interdisciplinary, with three main emphases: machine learning, complex systems, and computational systems biology. Dr. Azevedo has over 200 scientific publications about protein structures, computer models of complex systems, and simulations of protein systems. These workers have over 7000 citations on the Web of Science (h-index: 48. m-quotient: 1.7), +7000 citations in Scopus (h-index: 48), and +9000 citations on Google Scholar (h-index: 53).



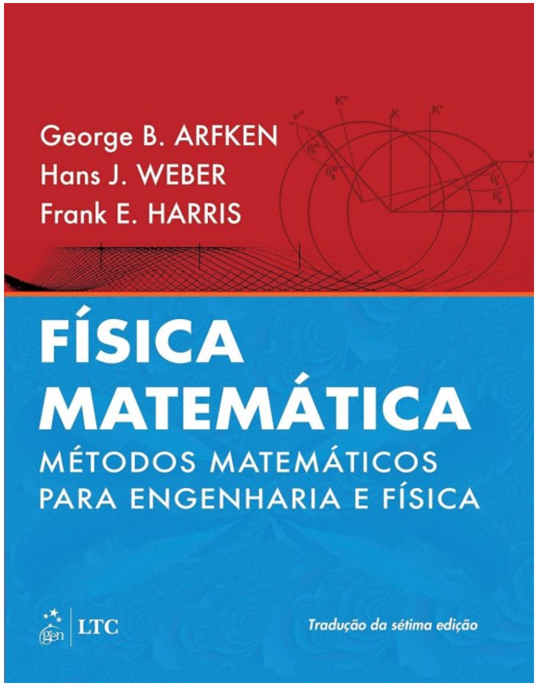


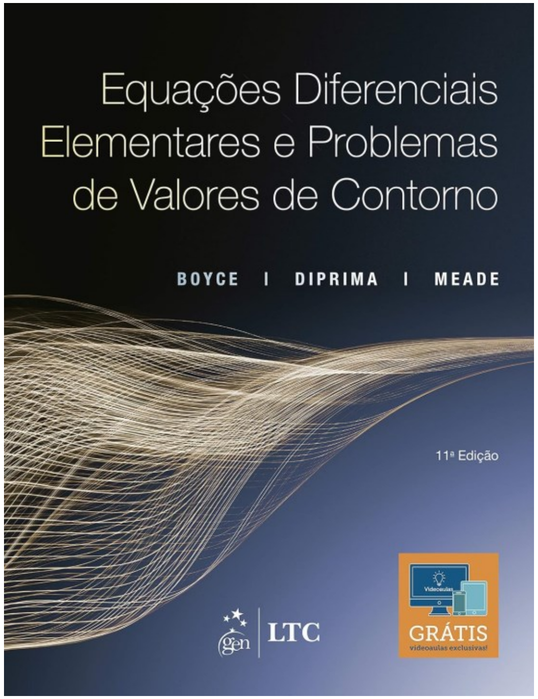


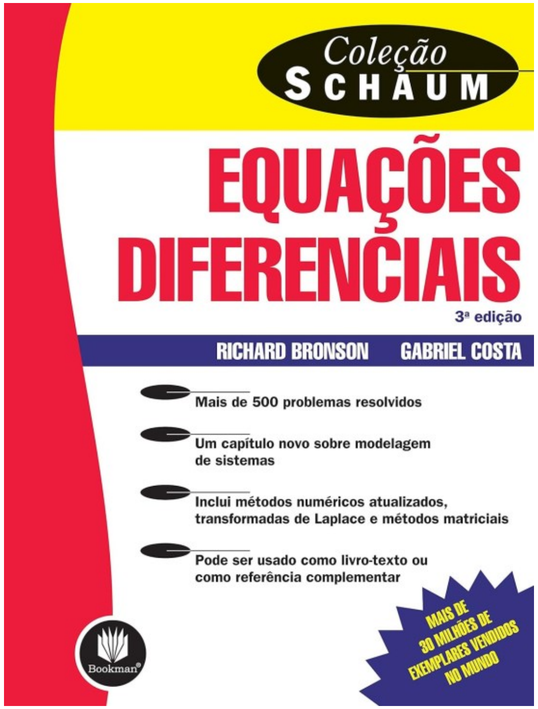
ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo - V1** (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo – V2** (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações** (Portuguese Edition). Edição do Kindle.





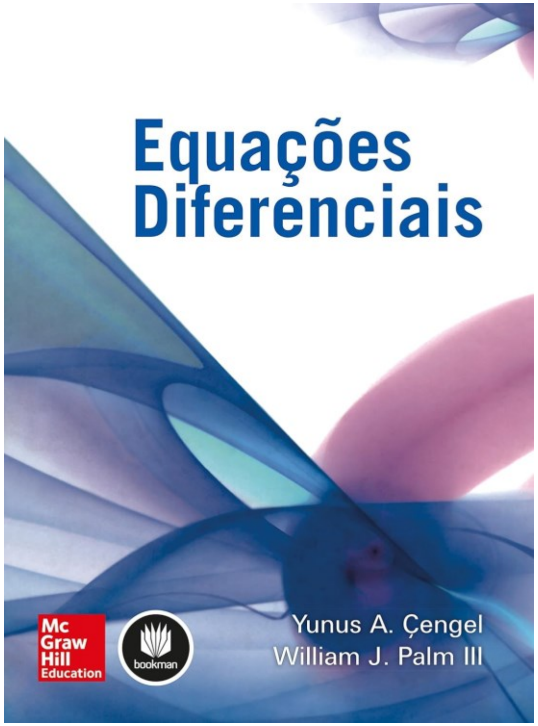


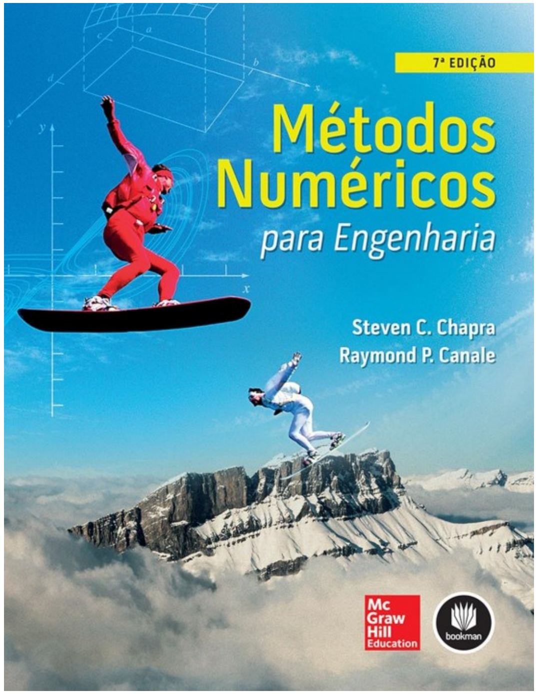
ARFKEN, George. **Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física** (Portuguese Edition). GEN LTC. Edição do Kindle.

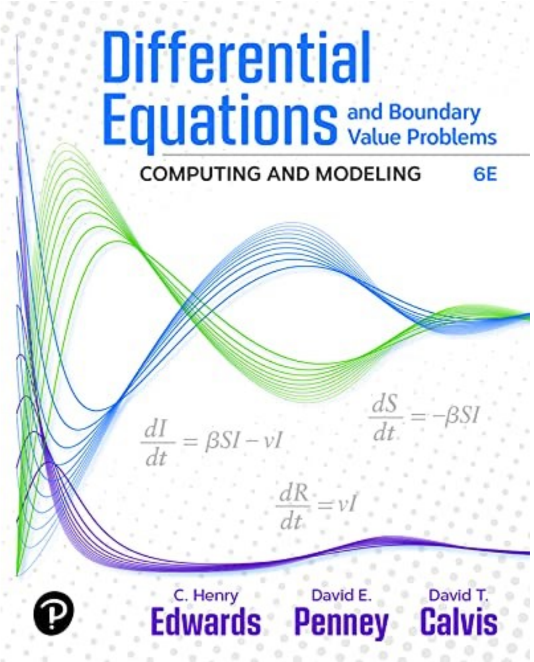
BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C.; MEADE, Douglas B**. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno** (Portuguese Edition). LTC. Edição do Kindle.

BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel. **Equações Diferenciais (Coleção Schaum)** (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

Referências



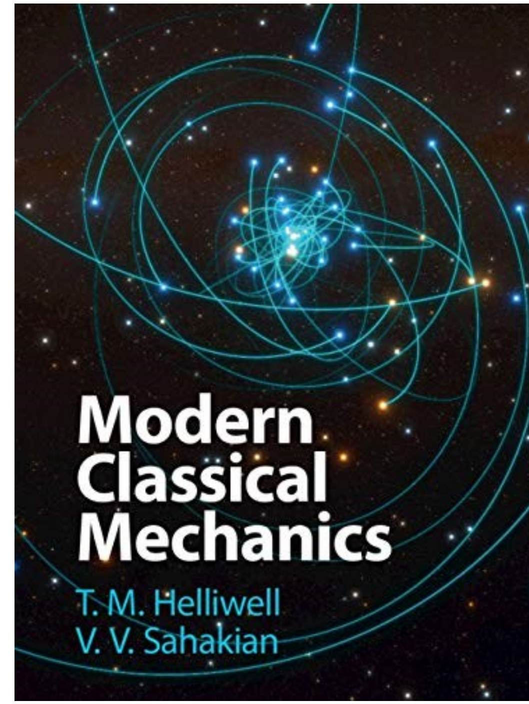




CENGEL, Yunus A.; Palm **III**, William J. **Equações Diferenciais** (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos Numéricos para Engenharia** (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

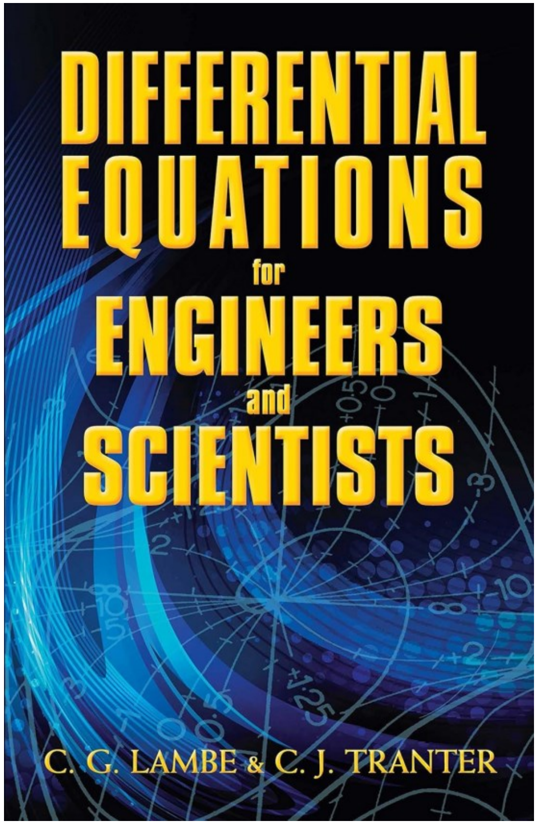
EDWARDS, C. Henry; PENNEY, David E.; CALVIS, David. **Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling**. Pearson Education. Edição do Kindle.

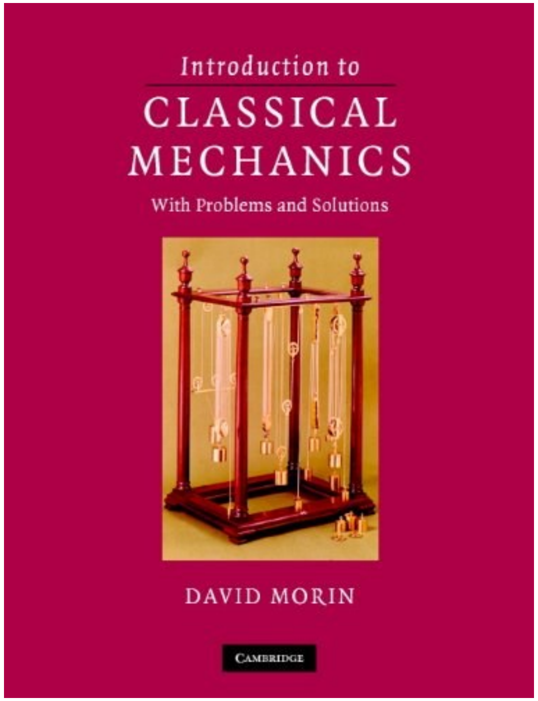


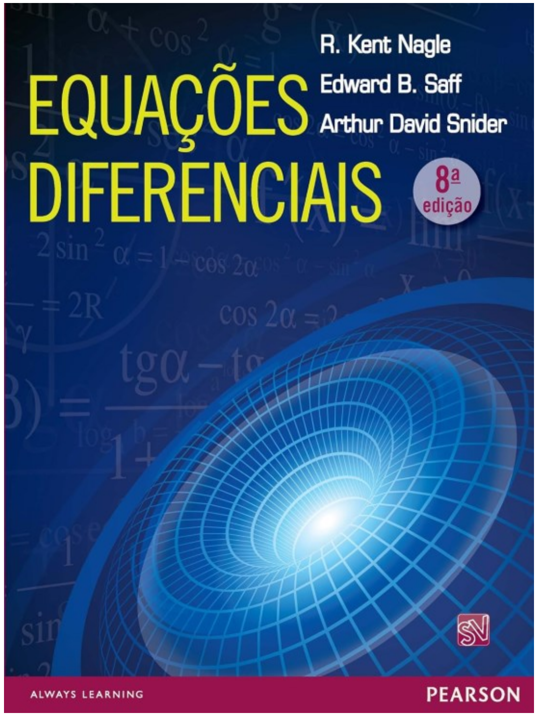
HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos da Física - Mecânica - Volume 1**. GEN | LTC. Edição do Kindle.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física - Eletromagnetismo - Volume 3.** GEN | LTC. Edição do Kindle.

HELLIWELL, T. M.; SAHAKIAN, V. V. **Modern Classical Mechanics.** Cambridge University Press. Edição do Kindle.





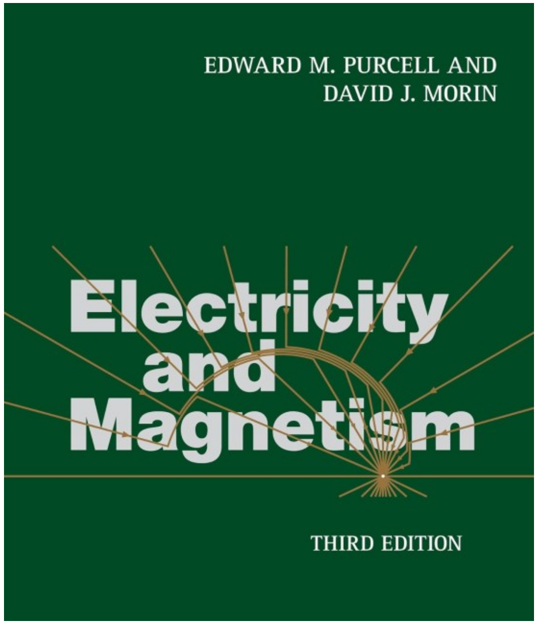


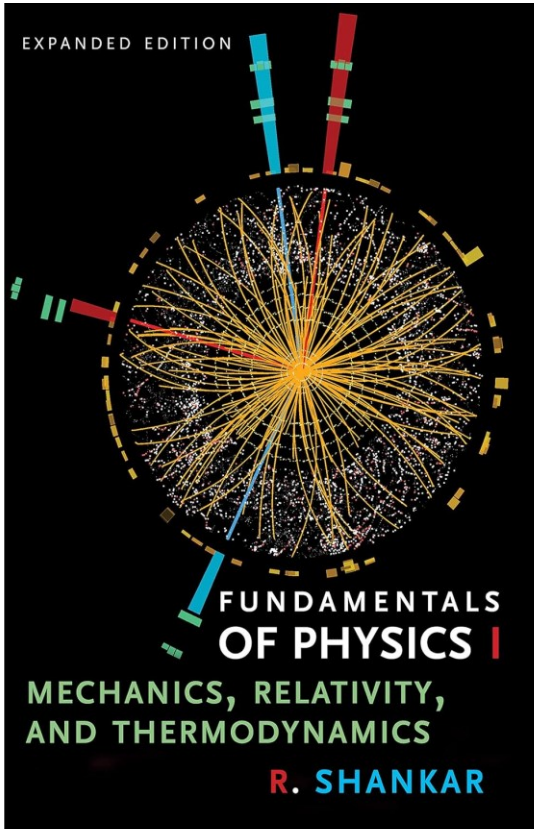
LAMBE, C.G.; TRANTER, C.J. **Differential Equations for Engineers and Scientists** (Dover Books on Mathematics). Dover Publications. Edição do Kindle.

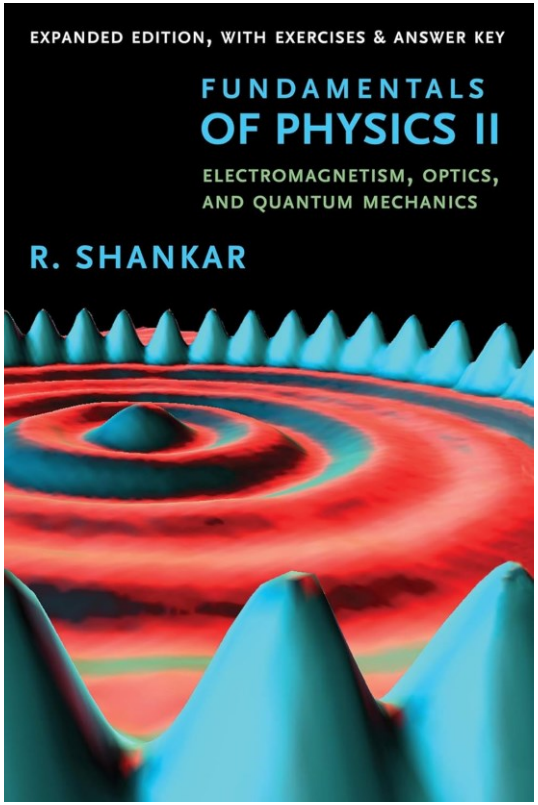
MORIN, David. **Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions.** Cambridge University Press. Edição do Kindle.

NAGLE, R. Kent. **Equações Diferenciais** (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

Referências



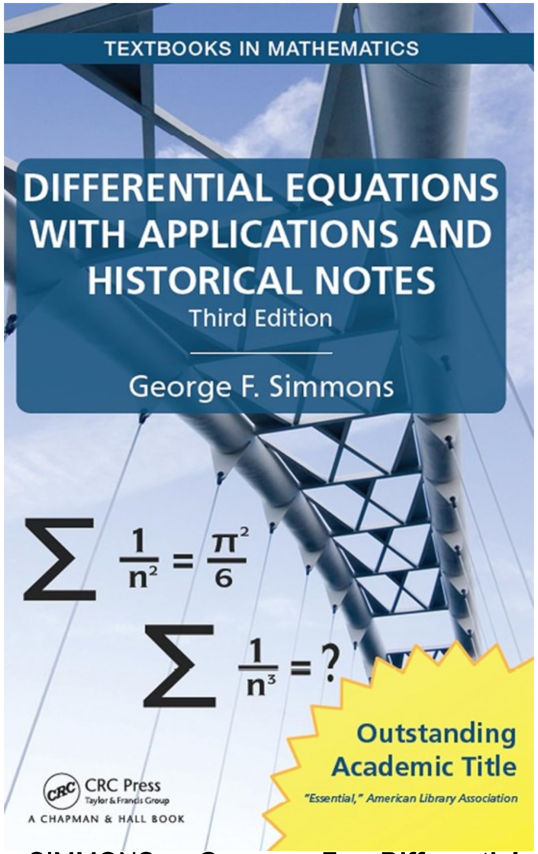




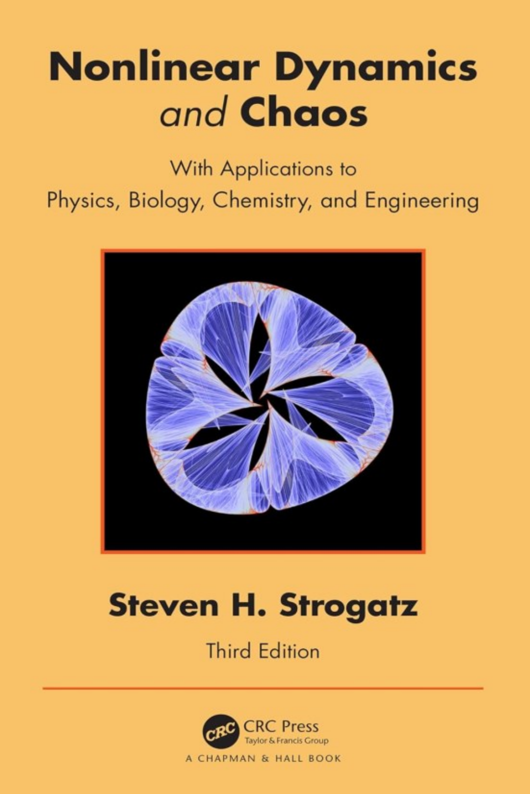
PURCELL, Edward M.; MORIN, David J. **Electricity and Magnetism.** Cambridge University Press. Edição do Kindle.

SHANKAR, R. **Fundamentals of Physics I: Mechanics, Relativity, and Thermodynamics** (The Open Yale Courses Series). Yale University Press. Edição do Kindle.

SHANKAR, R. **Fundamentals of Physics II: Electromagnetism, Optics, and Quantum Mechanics** (The Open Yale Courses Series). Yale University Press. Edição do Kindle.



SIMMONS, George F. **Differential Equations with Applications and Historical Notes (Textbooks in Mathematics)**. CRC Press. Edição do Kindle.



STROGATZ, Steven H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering**. CRC Press. Edição do Kindle.


Que a luz da ciência acabe com as trevas do negacionismo.