# Física I- Vetores

Resumo dos Conceitos

Extraído do capítulo 3 do livro: Halliday, David; Resnick, Robert; Walker, Jearl. Fundamentos da Física - Mecânica - Volume 1. GEN | LTC. Edição do Kindle.

**Escalares e Vetores**

Grandezas escalares, como temperatura, possuem apenas um valor numérico. São especificadas por um número com uma unidade (10 ° C, por exemplo) e obedecem às regras da aritmética e da álgebra elementar. As grandezas vetoriais, como o deslocamento, possuem um valor numérico (módulo) e uma orientação (5 m para cima, por exemplo) e obedecem às regras da álgebra vetorial.

**Soma Geométrica de Vetores**

Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ podem ser somados geometricamente desenhando-os na mesma escala e posicionando-os com a origem de um na extremidade do outro. O vetor que liga as extremidades livres dos dois vetores é o vetor soma, $\vec{s}$. Para subtrair $\vec{b}$ de $\vec{a}$, invertemos o sentido de $\vec{b}$ para obter $-\vec{b}$ e somamos $-\vec{b}$ a $\vec{a}$. A soma vetorial é comutativa

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

obedece à lei associativa

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

**Componentes de um Vetor**

As componentes (escalares) $a_x$ e $a_y$ de um vetor bidimensional $\vec{a}$ em relação aos eixos de um sistema de coordenadas xy são obtidas traçando retas perpendiculares aos eixos a partir da origem e da extremidade de $\vec{a}$. As componentes são dadas por

$$a_x = a \cos\theta \text{ e } a_y = a \text{ sen } \theta,$$

em que θ é o ângulo entre $\vec{a}$ e o semieixo x positivo. O sinal algébrico de uma componente indica o sentido da componente em relação ao eixo correspondente. Dadas as componentes, podemos determinar o módulo e a orientação de um vetor através das equações

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \text{ e}$$

$$\tan\theta = \frac{a_x}{a_y}.$$

**Notação dos Vetores Unitários**

Os vetores unitários $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ têm módulo unitário e sentido igual ao sentido positivo dos eixos *x*, *y* e *z*, respectivamente, se o sistema de coordenadas for dextrogiro (o que pode ser verificado calculando os produtos vetoriais dos vetores unitários). Em termos dos vetores unitários, um vetor pode ser expresso na forma

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

em que $a_x\hat{\imath}$, $a_y\hat{\jmath}$ e $a_z\hat{k}$ são as componentes vetoriais de $\vec{a}$ e $a_x$, $a_y$ e $a_z$ são as componentes escalares.

**Soma de Vetores na Forma de Componentes**

Para somar vetores na forma de componentes, usamos as regras

$$r_x = a_x + b_x$$

$$r_y = a_y + b_y$$

$$r_z = a_z + b_z\ .$$

Aqui, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são os vetores a serem somados e $\vec{r}$ é o vetor soma. Note que as componentes são somadas separadamente para cada eixo. No fim, a soma pode ser expressa na notação dos vetores unitários ou na notação módulo-ângulo.

**Produto de um Escalar por um Vetor**

O produto de um escalar *e* por um vetor $\vec{v}$ é um vetor de módulo *ev* com a mesma orientação de $\vec{v}$ se *e* for positivo, e com a orientação oposta se *e* for negativo. (O sinal negativo inverte o sentido do vetor.) Para dividir $\vec{v}$ por *e*, multiplicamos $\vec{v}$ por *1/ e*.

**O Produto Escalar**

O produto escalar de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é representado por $\vec{a}.\vec{b}$ e é igual à grandeza escalar dada por

$$\vec{a}.\vec{b} = a\ b\ \cos\phi$$

em que ϕ é o menor dos ângulos entre as direções de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O produto escalar é o produto do módulo de um dos vetores pela componente escalar do outro em relação ao primeiro. Note que $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$, o que significa que o produto escalar obedece à lei comutativa.

Na notação dos vetores unitários,

$$\vec{a}.\vec{b} = \left(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\right).\left(b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}\right),$$

que pode ser expandido de acordo com a lei distributiva.

**O Produto Vetorial**

O produto vetorial de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, representado por $\vec{a} \times \vec{b}$ e, é um vetor $\vec{c}$ cujo módulo $c$ é dado por

$$c = a\, b\, \sin\phi$$

em que ϕ é o menor dos ângulos entre as direções de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A orientação de $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e é dada pela regra da mão direita, como mostra a seguir. Note que $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$, o que significa que o produto vetorial não obedece à lei comutativa.

Na notação dos vetores unitários,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}),$$

que pode ser expandido de acordo com a lei distributiva.

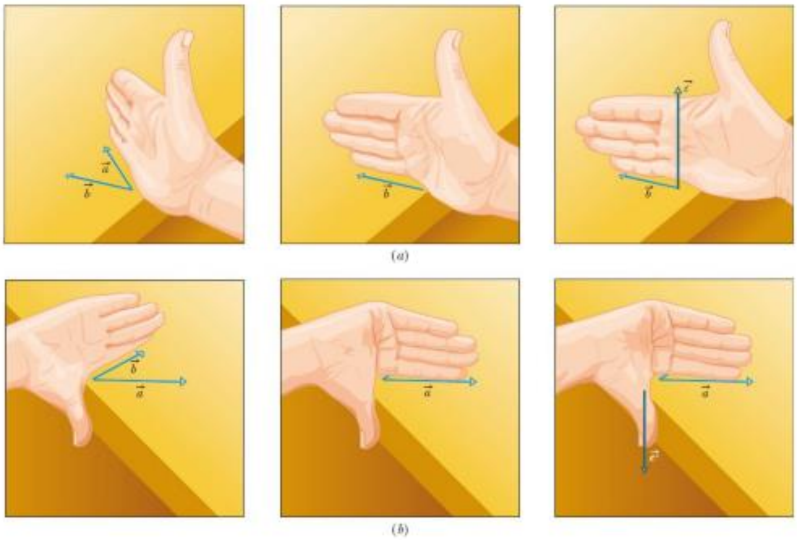
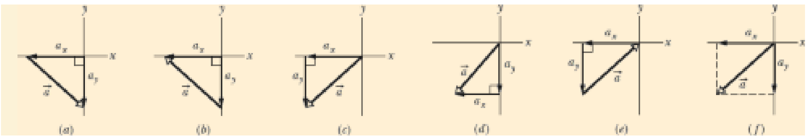


Ilustração da regra da mão direita para produtos vetoriais. (a) Empurre o vetor $\vec{a}$ na direção do vetor $\vec{b}$ com os dedos da mão direita. O polegar estendido mostra a orientação do vetor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. (b) O vetor $\vec{b} \times \vec{a}$, tem o sentido oposto ao de $\vec{a} \times \vec{b}$.

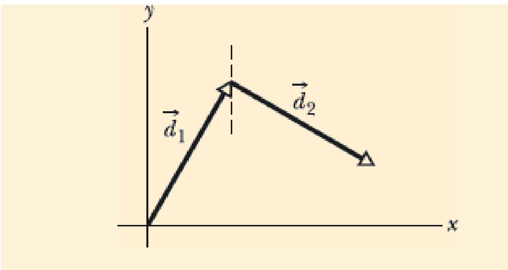
Halliday, David; Resnick, Robert; Walker, Jearl. Fundamentos da Física - Mecânica - Volume 1 (p. 246). GEN | LTC. Edição do Kindle.

Exercícios

1. Os módulos dos deslocamentos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são 3 m e 4 m, respectivamente, e $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Considerando as várias orientações possíveis de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, (a) qual é o maior e (b) qual é o menor valor possível do módulo de $\vec{c}$?
2. Quais dos métodos indicados na figura são corretos para determinar o vetor $\vec{a}$ a partir das componentes *x* e *y*?

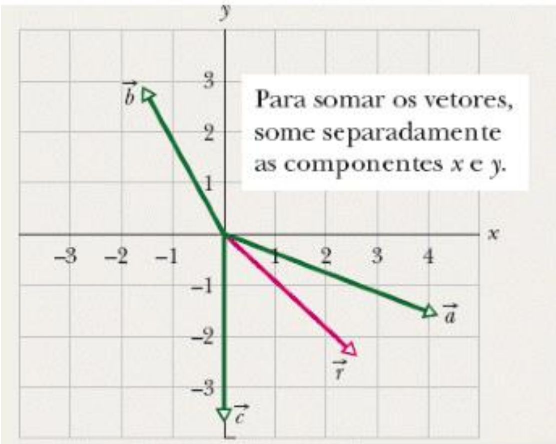


3. (a) Quais são os sinais das componentes *x* de $\overrightarrow{d_1}$ e $\overrightarrow{d_2}$ na figura? (b) Quais são os sinais das componentes *y* de $\overrightarrow{d_1}$ e $\overrightarrow{d_2}$? (c) Quais são os sinais das componentes *x* e *y* de $\overrightarrow{d_1} + \overrightarrow{d_2}$?




4. A figura abaixo mostra três vetores:

$$\vec{a} = (4{,}2\text{ m})\hat{\imath} - (1{,}5\text{ m})\hat{\jmath},$$
$$\vec{b} = (-1{,}6\text{ m})\hat{\imath} + (2{,}9\text{ m})\hat{\jmath},$$
e
$$\vec{c} = (-3{,}7\text{ m})\hat{\jmath}.$$

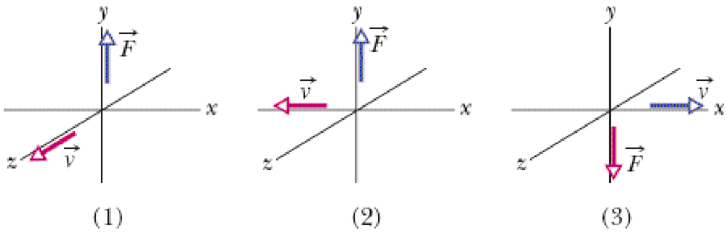



Qual é o vetor soma $\vec{r}$?

5. Os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$ têm módulos de 3 e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre esses vetores se $\vec{C}.\vec{D}$ é igual a (a) zero, (b) 12 unidades e (c) –12 unidades?
6. Os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$ têm módulos de 3 e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre esses vetores se o módulo do produto vetorial $\vec{C} \times \vec{D}$ é igual a (a) zero, (b) 12 unidades e (c) –12 unidades?
7. Qual é o ângulo ϕ entre os seguintes vetores:

$\vec{a} = 3{,}0\hat{\imath} - 4{,}0\hat{\jmath}$ e $\vec{b} = -2{,}0\hat{\imath} + 3{,}0\hat{k}$.

8. O vetor $\vec{a}$ está no plano *xy*, tem um módulo de 18 unidades e uma orientação que faz um ângulo de 250º com o semieixo *x* positivo. O vetor $\vec{b}$ tem um módulo de 12 unidades e está orientado ao longo do semieixo *z* positivo. Qual é o produto vetorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?
9. Se $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ e $\vec{b} = -2\hat{\imath} + 3\hat{k}$, determine $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.
10. Se $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ e é perpendicular a $\vec{B}$, qual é a orientação de $\vec{B}$ nas três situações mostradas na figura abaixo se a carga *q* for (a) positiva (b) negativa?




11. Em um jogo disputado em um labirinto tridimensional, você precisa mover sua peça da partida, nas coordenadas (0, 0, 0), para a chegada, nas coordenadas (− 2 cm, 4 cm, − 4 cm). A peça pode sofrer apenas os deslocamentos (em centímetros) mostrados a seguir. Se, durante o trajeto, a peça parar nas coordenadas (− 5 cm, − 1 cm, − 1 cm) ou (5 cm, 2 cm, − 1 cm), você perde o jogo. Qual é a sequência de deslocamentos correta para levar a peça até a chegada?

$\vec{p} = -7\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ $\quad \vec{r} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

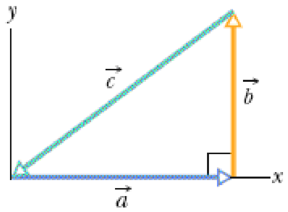
$\vec{q} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ $\quad \vec{s} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}.$

12. Quais das expressões vetoriais a seguir estão corretas? O que está errado nas expressões incorretas?

| | |
|---|---|
| (a) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$ | (f) $\vec{A} + (\vec{B} \times \vec{C})$ |
| (b) $\vec{A} \times (\vec{B} \cdot \vec{C})$ | (g) $5 + \vec{A}$ |
| (c) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ | (h) $5 + (\vec{B} \cdot \vec{C})$ |
| (d) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ | (i) $5 + (\vec{B} \times \vec{C})$ |
| (e) $\vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{C})$ | (j) $(\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \times \vec{C})$ |

13. Quais são (a) a componente *x* e (b) a componente *y* de um vetor $\vec{a}$ do plano *xy* que faz um ângulo de 250 ° no sentido anti-horário como o semieixo *x* positivo e tem um módulo de 7,3 m?
14. Considere os seguintes vetores: $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ e $\vec{b} = \hat{k}$. Calcule (a) o produto escalar $\vec{a}.\vec{b}$ e (b) o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$.
15. Considere dois deslocamentos, um de módulo 3 m e outro de módulo 4 m. Mostre de que forma os vetores deslocamentos podem ser combinados para que o módulo do deslocamento resultante seja (a) 7 m, (b) 1 m, (c) 5 m.
16. Uma pessoa deseja chegar a um ponto que está a 3,40 km da localização atual, em uma direção 35,0° ao norte do leste. As ruas por onde a pessoa pode passar são todas na direção norte-sul ou na direção leste-oeste. Qual é a menor distância que essa pessoa precisa percorrer para chegar ao destino?
17. Na Considere os seguintes vetores: $\vec{a} = \hat{k}$ e $\vec{b} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$. Calcule (a) o produto escalar $\vec{a}.\vec{b}$ e (b) o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

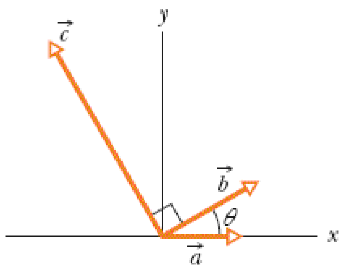
18. Para os vetores da figura abaixo, com $a$ = 4, $b$ = 3 e $c$ = 5, determine (a) o módulo e (b) a orientação de $\vec{a} \times \vec{b}$, (c) o módulo e (d) a orientação de $\vec{a} \times \vec{c}$ e (e) o módulo e (f) orientação de $\vec{b} \times \vec{c}$. (Embora exista, o eixo $z$ não é mostrado na figura.)




19. O módulo do vetor $\vec{A}$ é 6,00 unidades, o módulo do vetor $\vec{B}$ é 7,00 unidades e $\vec{A}.\vec{B} = 14$. Qual é o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$?
20. Calcule o ângulo entre os seguintes vetores.

$\vec{a} = 3{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}$ e $\vec{b} = 2{,}0\hat{i} + 1{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}$.

21. Os três vetores na figura abaixo têm módulos $a$ = 3,00 m, $b$ = 4,00 m e $c$ = 10,0 m; θ = 30,0 °. Determine (a) a componente $x$ e (b) a componente $y$ de $\vec{a}$; (c) a componente $x$ e (d) a componente $y$ de $\vec{b}$; (e) a componente $x$ e (f) a componente $y$ de $\vec{c}$. Se $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$, quais são os valores de (g) p e (h) q?



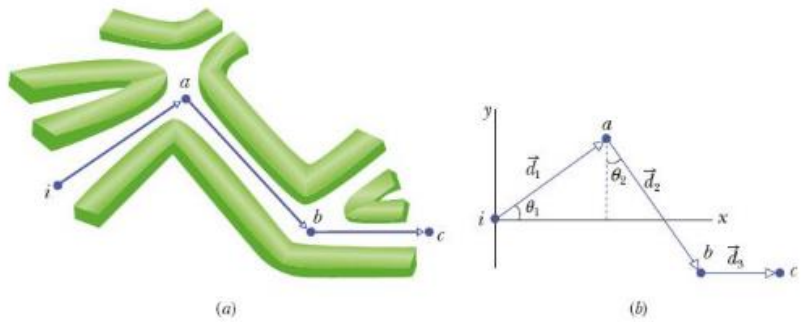

22. Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estão no plano $xy$. $\vec{A}$ tem módulo 8,00 e ângulo 130°; $\vec{B}$ tem componentes $B_x$ = − 7,72 e $B_y$ = − 9,20. Determine o ângulo entre o semieixo $y$ negativo e (a) o vetor $\vec{A}$, (b) o vetor $\vec{A} \times \vec{B}$ e (c) o vetor $\vec{A} \times (\vec{B} + 3\hat{k})$.
23. Um vetor $\vec{a}$ de módulo 10 unidades e um vetor $\vec{b}$ de módulo 6,0 unidades fazem um ângulo de 60°. Determine (a) o produto escalar dos dois vetores e (b) o módulo do produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$.
24. São dados três vetores em metros como segue:

$$\vec{d}_1 = -3{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$$
$$\vec{d}_2 = -2{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$$
$$\vec{d}_3 = 2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 1{,}0\hat{k}.$$

Determine (a) $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 + \vec{d}_3)$, (b) $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 \times \vec{d}_3)$ e (c) $\vec{d}_1 \times (\vec{d}_2 + \vec{d}_3)$.

25. Labirinto de sebes. O labirinto de sebes é um labirinto formado por sebes bem altas. Depois de entrar no labirinto, você deve encontrar o ponto central e, em seguida, descobrir a saída. A figura a mostra a entrada do labirinto e as duas mudanças de direção

necessárias para ir do ponto *i* ao ponto *c*. O percurso corresponde aos três deslocamentos mostrados na vista aérea da figura b: $d_1$ = 6,00 m e $\theta_1$ = 40 °, $d_2$ = 8,00 m e $\theta_2$ = 30 ° e $d_3$ = 5,00 m e $\theta_3$ = 0 °, em que o último deslocamento é paralelo ao eixo *x*. Quais são (a) o módulo e (b) o ângulo do deslocamento total do ponto *c* em relação ao ponto *i*?




Halliday, David; Resnick, Robert; Walker, Jearl. Fundamentos da Física - Mecânica - Volume 1. GEN | LTC. Edição do Kindle.

Respostas

1. (a) 7 m; (b) 1 m.
2. (c), (d), (f).
3. (a) +, +; (b) +, −; (c) +, + (o vetor deve ser traçado da origem de 1 à extremidade de 2)
4. $\vec{r} = (2{,}6\ m)\hat{\imath} - (2{,}3\ m)\hat{\jmath}$; r ≈ 3,5 m; $\theta$ = - 41°.
5. (a) 90°. (b) 0°; (c) 180°.
6. (a) 0° ou 180°; (b) 90°.
7. $\phi \approx 110°$.
8. c = 216; $\theta$= 160°.
9. $\vec{c} = -12\hat{\imath} - 9\hat{\jmath} - 8\hat{k}$.
10. (a) + x para (1), + z para (2), + z para (3); (b) − x para (1), − z para (2), − z para (3).
11. $\vec{s}, \vec{p}, \vec{r}$.
12. Corretas: c, d, f, h. Incorretas: a (não é possível calcular o produto escalar de um vetor por um escalar), b (não é possível calcular o produto vetorial de um vetor por um escalar), e, g, i, j (não é possível somar um escalar e um vetor).
13. (a) − 2,5 m; (b) − 6,9 m.
14. (a) 1; (b) $\hat{\imath} - \hat{\jmath}$.
15. (a) paralelos; (b) antiparalelos; (c) perpendiculares.
16. 4,74 km.
17. (a) 1; (b) $-\hat{\imath} + \hat{\jmath}$.
18. (a) 12; (b) + z; (c) 12; (d) − z; (e) 12; (f) + z.
19. 70,5°.
20. 22°.
21. (a) 3,00 m; (b) 0; (c) 3,46 m; (d) 2,00 m; (e) − 5,00 m; (f) 8,66 m; (g) − 6,67; (h) 4,33.
22. (a) 140°; (b) 90,0°; (c) 99,1°.
23. a) 30; (b) 52.
24. (a) 3,0 $m^2$; (b) 52 $m^3$; (c) (11 $m^2$) $\hat{\imath}$ + (9,0 $m^2$) $\hat{\jmath}$ + (3,0 $m^2$)$\hat{k}$.
25. (a) 13,9 m; (b) -12,7°.