

# Física I- Movimento em Duas e Três Dimensões

## Resumo dos Conceitos

Extraído do capítulo 4 do livro: Halliday, David; Resnick, Robert; Walker, Jearl. Fundamentos da Física - Mecânica - Volume 1. GEN | LTC. Edição do Kindle.

### Vetor Posição

A localização de uma partícula em relação à origem de um sistema de coordenadas é dada por um vetor posição  $\vec{r}$ , que, na notação dos vetores unitários, é dado por

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$

Aqui,  $x\hat{i}$ ,  $y\hat{j}$  e  $z\hat{k}$  são as componentes vetoriais do vetor posição  $\vec{r}$ , e  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as componentes escalares do vetor posição (e, também, as coordenadas da partícula). Um vetor posição pode ser descrito por um módulo e um ou dois ângulos, pelas componentes vetoriais ou pelas componentes escalares.

### Deslocamento

Se uma partícula se move de tal forma que o vetor posição muda de  $\vec{r}_1$  para  $\vec{r}_2$ , o deslocamento  $\Delta\vec{r}$  da partícula é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

O deslocamento também pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \\ &= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}.\end{aligned}$$

### Velocidade Média e Velocidade Instantânea

Se uma partícula sofre um deslocamento  $\Delta\vec{r}$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a velocidade média nesse intervalo de tempo é dada por

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Quando  $\Delta t$  na equação tende a 0, velocidade média tende para um limite que é chamado velocidade instantânea ou, simplesmente, velocidade:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Na notação dos vetores unitários, a velocidade instantânea assume a forma

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k},$$

em que  $v_x = dx/dt$ ,  $v_y = dy/dt$  e  $v_z = dz/dt$ . A velocidade instantânea  $\vec{v}$  de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula na posição da partícula.

### Aceleração Média e Aceleração Instantânea

Se a velocidade de uma partícula varia de  $\vec{v}_1$  para  $\vec{v}_2$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ , a aceleração média durante o intervalo  $\Delta t$  é

$$\vec{a}_{\text{méd}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Quando  $\Delta t$  na equação acima tende a zero, a aceleração média tende para um limite que é chamado aceleração instantânea ou, simplesmente, aceleração:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Na notação dos vetores unitários,

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k},$$

em que  $a_x = dv_x/dt$ ,  $a_y = dv_y/dt$  e  $a_z = dv_z/dt$ .

### Movimento Balístico

Movimento balístico é o movimento de uma partícula que é lançada com uma velocidade inicial  $\vec{v}_0$ . Durante o percurso, a aceleração horizontal da partícula é zero, e a aceleração vertical é a aceleração de queda livre,  $-g$ . (O sentido do movimento para cima é escolhido como positivo.) Se  $\vec{v}_0$  se expressa por meio de um módulo (a velocidade escalar  $v_0$ ) e um ângulo  $\theta_0$  (medido em relação à horizontal), as equações de movimento da partícula ao longo do eixo horizontal  $x$  e do eixo vertical  $y$  são

$$\begin{aligned}x - x_0 &= (v_0 \cos \theta_0)t, \\y - y_0 &= (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2, \\v_y &= v_0 \sin \theta_0 - gt, \\v_y^2 &= (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y - y_0).\end{aligned}$$

Considerando  $x_0$  e  $y_0$  das equações acima como nulo, temos que a trajetória de uma partícula em movimento balístico tem a forma de uma parábola e é dada por

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2},$$

O alcance horizontal  $R$  da partícula, que é a distância horizontal do ponto de lançamento ao ponto em que a partícula retorna à altura do ponto de lançamento, é dado por

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0.$$

## Movimento Circular Uniforme

Se uma partícula descreve uma circunferência ou arco de circunferência de raio  $r$  com velocidade constante  $v$ , dizemos que se trata de um movimento circular uniforme. Nesse caso, a partícula possui uma aceleração cujo módulo é dado por

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

O vetor  $\vec{a}$  aponta para o centro da circunferência ou arco de circunferência e é chamado aceleração centrípeta. O tempo que a partícula leva para descrever uma circunferência completa é dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

O parâmetro  $T$  é chamado período de revolução ou, simplesmente, período.

### Exercícios

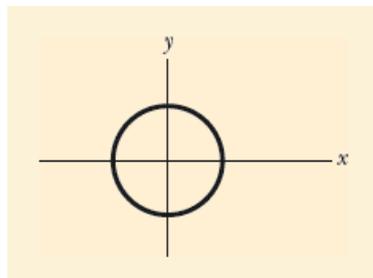
1. Um morcego voa das coordenadas  $(-2 \text{ m}, 4 \text{ m}, -3 \text{ m})$  para as coordenadas  $(6 \text{ m}, -2 \text{ m}, -3 \text{ m})$ . O vetor deslocamento do morcego é paralelo a que plano?
2. Um coelho atravessa um estacionamento, no qual, por alguma razão, um conjunto de eixos coordenados foi desenhado. As coordenadas da posição do coelho, em metros, em função do tempo  $t$ , em segundos, são dadas por

$$x = -0,31t^2 + 7,2t + 28$$

e

$$y = 0,22t^2 - 9,1t + 30.$$

- (a) No instante  $t = 15 \text{ s}$ , qual é o vetor posição do coelho na notação dos vetores unitários e na notação módulo-ângulo? (b) Determine a velocidade no instante  $t = 15 \text{ s}$  do coelho. (c) Determine a aceleração  $\vec{a}$  no instante  $t = 15 \text{ s}$ .
3. A figura mostra uma trajetória circular descrita por uma partícula. Se a velocidade da partícula em um dado instante é  $\vec{v} = (2 \text{ m/s})\hat{i} - (2 \text{ m/s})\hat{j}$ , em qual dos quadrantes a partícula está se movendo nesse instante se o movimento é (a) no sentido horário e (b) no sentido anti-horário?

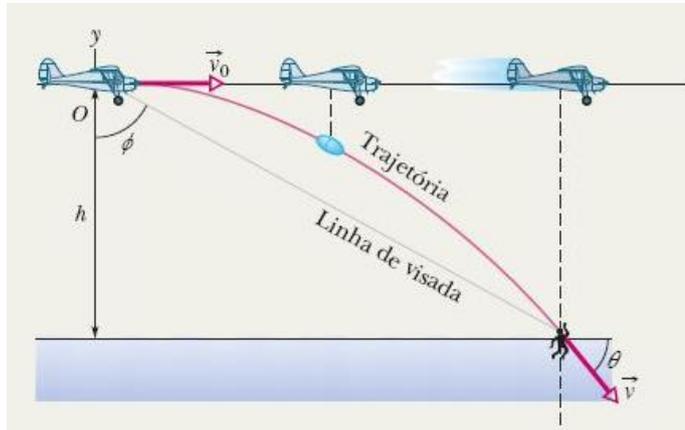


4. Considere as seguintes descrições da posição (em metros) de uma partícula que se move no plano  $xy$ :

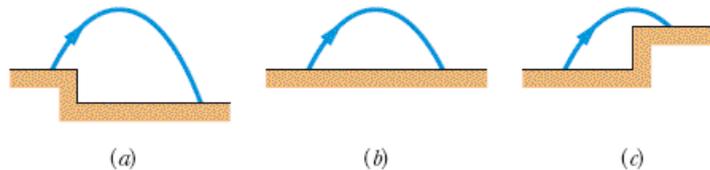
$$(1) x = -3t^2 + 4t - 2 \quad e \quad y = 6t^2 - 4t \quad (3) \vec{r} = 2t^2\hat{i} - (4t + 3)\hat{j}$$
$$(2) x = -3t^3 - 4t \quad e \quad y = -5t^2 + 6 \quad (4) \vec{r} = (4t^3 - 2t)\hat{i} + 3\hat{j}$$

As componentes  $x$  e  $y$  da aceleração são constantes em todas essas situações? A aceleração  $\vec{a}$  é constante?

5. Na Figura abaixo, um avião de salvamento voa a  $198 \text{ km/h}$  ( $= 55,0 \text{ m/s}$ ), a uma altura constante de  $500 \text{ m}$ , rumo a um ponto diretamente acima da vítima de um naufrágio, para deixar cair uma balsa. (a) Qual deve ser o ângulo  $\phi$  da linha de visada do piloto para a vítima no instante em que o piloto deixa cair a balsa? (b) No momento em que a balsa atinge a água, qual é a sua velocidade na notação dos vetores unitários e na notação módulo-ângulo?



6. A Figura abaixo mostra três situações nas quais projéteis iguais são lançados do solo (a partir da mesma altura) com a mesma velocidade escalar e o mesmo ângulo. Entretanto, os projéteis não caem no mesmo terreno. Ordene as situações de acordo com a velocidade escalar final dos projéteis imediatamente antes de aterrissarem, começando pela maior.



7. Um avião que está voando horizontalmente com uma velocidade constante de  $350 \text{ km/h}$ , sobrevoando um terreno plano, deixa cair um fardo com suprimentos. Ignore o efeito do ar sobre o fardo. Quais são as componentes inicial (a) vertical e (b) horizontal da velocidade do fardo? (c) Qual é a componente horizontal da velocidade imediatamente antes de o fardo se chocar com o solo? (d) Se a velocidade do avião fosse  $450 \text{ km/h}$ , o tempo de queda seria maior, menor ou igual?
8. Em que ponto da trajetória de um projétil a velocidade é mínima?
9. O vetor posição de um elétron é  $\vec{r} = (5m)\hat{i} - (3m)\hat{j} + (2,0m)\hat{k}$ . (a) Determine o módulo de  $\vec{r}$ . (b) Desenhe o vetor em um sistema de coordenadas dextrogiro.
10. Um pósitron sofre um deslocamento  $\Delta\vec{r} = 2,0\hat{i} - 3,0\hat{j} + 6,0\hat{k}$  e termina com um vetor posição  $\vec{r} = 3,0\hat{j} - 4,0\hat{k}$ , em metros. Qual era o vetor posição inicial do pósitron?
11. O vetor posição de um íon é inicialmente  $\vec{r} = 5,0\hat{i} - 6,0\hat{j} + 2,0\hat{k}$  e  $10 \text{ s}$  depois passa a ser  $\vec{r} = 2,0\hat{i} + 8,0\hat{j} - 2,0\hat{k}$ , com todos os valores em metros. Qual é a velocidade média  $\overline{v_{méd}}$  durante os  $10 \text{ s}$  na notação dos vetores unitários?
12. A posição  $\vec{r}$  de uma partícula que se move em um plano  $xy$  é dada por  $\vec{r} = (2,00t^3 - 5,00t)\hat{i} + (6,00 - 7,00t^4)\hat{j}$ , com  $\vec{r}$  em metros e  $t$  em segundos. Na notação dos vetores unitários, calcule (a)  $\vec{r}$ , (b)  $\vec{v}$  e (c)  $\vec{a}$  para  $t = 2,00 \text{ s}$ . (d) Qual é o ângulo entre o semieixo positivo  $x$  e uma reta tangente à trajetória da partícula em  $t = 2,00 \text{ s}$ ?

13. Uma partícula se move de tal forma que a posição (em metros) em função do tempo (em segundos) é dada por  $\vec{r} = \hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}$ . Escreva a expressão para a velocidade em função do tempo.
14. Um dardo é arremessado horizontalmente com uma velocidade inicial de 10 m/s em direção a um ponto  $P$ , o centro de um alvo de parede. O dardo atinge um ponto  $Q$  do alvo, verticalmente abaixo de  $P$ , 0,19 s depois do arremesso. (a) Qual é a distância  $PQ$ ? (b) A que distância do alvo foi arremessado o dardo?
15. O recorde atual de salto de motocicleta é 77,0 m, estabelecido por Jason Renie. Suponha que Renie tivesse partido da rampa fazendo um ângulo de  $12^\circ$  com a horizontal e que as rampas de subida e de descida tivessem a mesma altura. Determine a velocidade inicial, desprezando a resistência do ar.

Halliday, David; Resnick, Robert; Walker, Jearl. Fundamentos da Física - Mecânica - Volume 1. GEN | LTC. Edição do Kindle.

## Respostas

1. Plano  $xy$ .

2. (a)  $r = 87 \text{ m}$ ,  $\theta = -41^\circ$ ;

(b)

$$\vec{v} = (-2,1 \text{ m/s})\hat{i} + (-2,5 \text{ m/s})\hat{j},$$

$v = 3,3 \text{ m/s}$ ,  $\theta = -130^\circ$

(c)

$$\vec{a} = (-0,62 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (0,44 \text{ m/s}^2)\hat{j},$$

$a = 0,76 \text{ m/s}^2$ ,  $\theta = 145^\circ$

3. (trace  $\vec{v}$  tangente à trajetória, com a origem na trajetória) (a) primeiro; (b) terceiro

4. (calcule a derivada segunda em relação ao tempo) (1) e (3)  $a_x$  e  $a_y$  são constantes e, portanto,  $\vec{a}$  é constante; (2) e (4)  $a_y$  é constante, mas  $a_x$  não é constante e, portanto,  $\vec{a}$  não é constante

5. (a)  $\phi = 48^\circ$ ;

(b)

$$\vec{v} = (55,0 \text{ m/s})\hat{i} - (99,0 \text{ m/s})\hat{j}.$$

$$v = 113 \text{ m/s} \quad e \quad \theta = -60,9^\circ.$$

6.  $a, b, c$

7. (a) 0; (b) 350 km/h; (c) 350 km/h; (d) igual (a componente vertical do movimento seria a mesma)

8. No ponto em que a altura é máxima.

9. (a) 6,2 m

10.  $\vec{r} = (-2,0 \text{ m})\hat{i} + (6,0 \text{ m})\hat{j} - (10 \text{ m})\hat{k}$

11.  $(-0,70 \text{ m/s})\hat{i} + (1,4 \text{ m/s})\hat{j} - (0,4 \text{ m/s})\hat{k}$

12. (a)  $(6,00 \text{ m})\hat{i} - (106 \text{ m})\hat{j}$ ;

(b)  $(19,0 \text{ m/s})\hat{i} - (224 \text{ m/s})\hat{j}$ ;

(c)  $(24,0 \text{ m/s}^2)\hat{i} - (336 \text{ m/s}^2)\hat{j}$ ;

(d)  $-85,2^\circ$

13.  $(8)t\hat{j} + (1)\hat{k}$

14. (a) 18 cm; (b) 1,9 m

15. 43,1 m/s