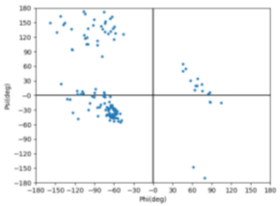
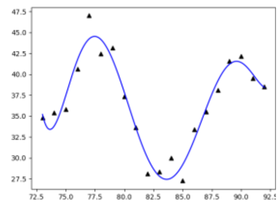
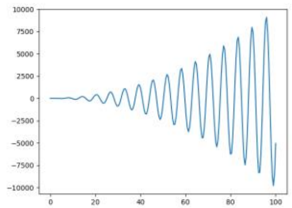
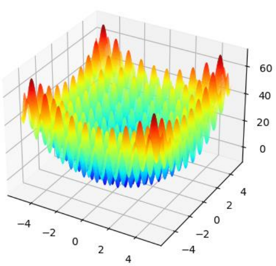
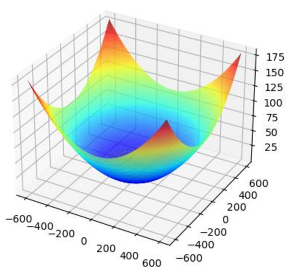
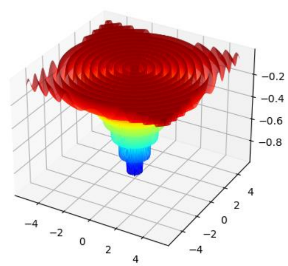
Preparação para Prova 01

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v$$

$$\frac{dy}{y} = -kdt$$

$$\frac{dv}{dt} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

$$\frac{dv}{dt} = a$$

$$\frac{du}{dt} = -k(u - T)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin\theta_0 - gt$$

Conteúdo

Questão 1

Vamos considerar o movimento ao longo do eixo *x*, onde temos uma partícula que se desloca com aceleração constante (*a* = *constante*) numa superfície sem atrito. Demonstre que a expressão da posição em função do tempo é dada pela seguinte equação:

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2}$$

Faça a dedução da expressão acima a partir da seguinte equação diferencial.

$$\frac{dv}{dt} = a$$

O *v* é a velocidade, *t* o tempo e *a* aceleração.
Use a tabela de integrais abaixo onde *C* é uma constante de integração.

$\int dx = x + C$	$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int dy = y + C$	$\int y dy = \frac{y^2}{2} + C$	$\int \frac{dy}{y} = \ln\lvert y\rvert + C$
$\int dt = t + C$	$\int t dt = \frac{t^2}{2} + C$	$\int \frac{dt}{t} = \ln\lvert t\rvert + C$

Questão 1 (Solução)

Iniciamos com a derivada da velocidade em relação ao tempo, como segue.

$$\frac{dv}{dt} = a$$

Como a aceleração *a* é constante, podemos resolver a equação diferencial acima por separação de variáveis.

$$dv = adt$$

Integrando-se ambos os lados da igualdade acima, temos o seguinte resultado.

$$\int dv = \int adt$$

Como *a* é constante, podemos tirá-la da integral.

$$\int dv = a \int dt \rightarrow v = at + C$$

Considerando-se $v = v_0$ para $t = 0$, temos o seguinte resultado.

$$v_0 = at + C = a.0 + C \rightarrow C = v_0$$

Substituindo-se na expressão da velocidade, temos a seguinte equação.

$$v = v_0 + at$$

Agora temos que considerar que *v* é a derivada em relação ao tempo da posição.

Questão 1 (Solução)

Introduzindo a derivada da posição em relação ao tempo.

$$v = v_0 + at \rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

Separando-se as variáveis da equação diferencial acima, temos a seguinte expressão.

$$dx = v_0 dt + atdt$$

Integrando-se ambos os lados da equação acima, chegamos ao resultado abaixo.

$$\int dx = \int v_0 dt + \int atdt$$

Resolvendo-se as integrais, chegamos à expressão a seguir.

$$x = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 + c$$

Considerando-se $x = x_0$ para $t = 0$, temos o resultado a seguir.

$$x_0 = v_0 . 0 + \frac{a}{2} 0^2 + C \rightarrow C = x_0$$

Substituindo-se a constante na expressão acima, chegamos ao resultado esperado.

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2}$$

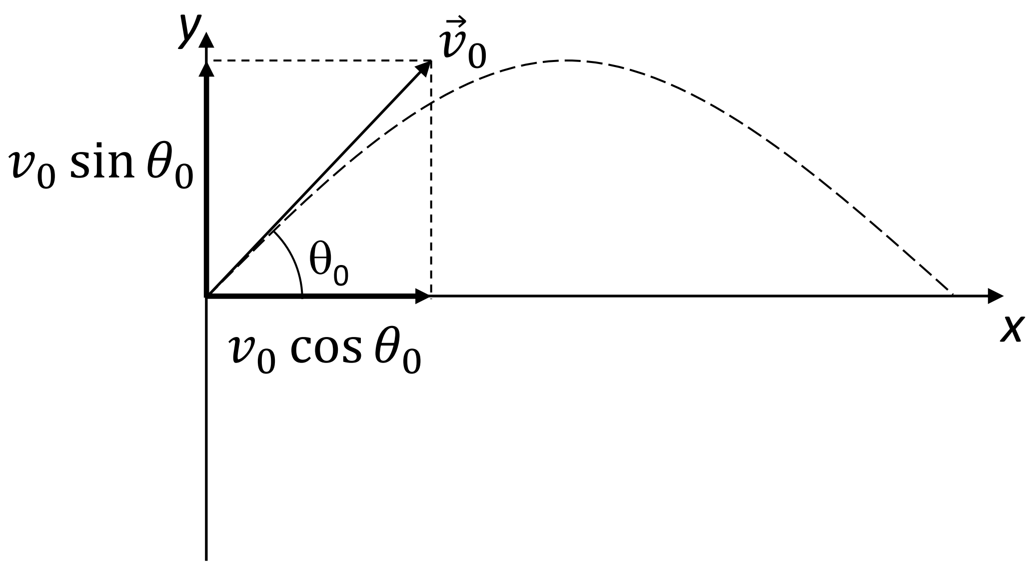
Considere o movimento balístico sem a resistência do ar e com a gravidade constante na superfície da Terra. Prove que a posição vertical *y* da partícula em movimento balístico é dada pela seguinte equação.

$$\boxed{\mathrm{y} = y_0 + v_0 \sin\theta_0\, t - \frac{g}{2} t^2}$$

Faça a dedução da expressão acima a partir da seguinte equação diferencial.

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

Onde *v* e a velocidade, *t* o tempo e *g* aceleração.
O diagrama esquemático abaixo ilustra a geometria do movimento balístico.



Consideramos a equação diferencial a seguir.

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

Como a aceleração da gravidade é constante, podemos resolver a equação diferencial por separação de variáveis.

$$dv = -gdt$$

Integrando-se ambos os lados da expressão acima, temos o seguinte resultado.

$$\int dv = \int -gdt \rightarrow \int dv = -g \int dt \rightarrow v = -gt + C$$

Vamos considerar que $v = v_0 sin\ \theta_0$ para $t = 0$.

$$v_0 \sin\theta_0 = -g.0 + C \rightarrow C = v_0 \sin\theta_0$$

Substituindo-se C, na equação anterior, temos.

$$v = v_0 \sin\theta_0 - gt$$

Sabemos que a velocidade é a derivada da posição em relação ao tempo, no caso a posição vertical *y*, como segue.

$$\frac{dy}{dt} = v$$

Substituindo-se a expressão da velocidade na equação acima, chegamos ao seguinte resultado.

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin\theta_0 - gt \rightarrow dy = v_0 \sin\theta_0\, dt - gtdt$$

Integramos ambos os lados.

$$\int dy = \int v_0 \sin\theta_0\, dt - \int gtdt \rightarrow y = v_0 \sin\theta_0 t - \frac{g}{2}t^2 + C$$

Considerando-se $y = y_0$ para $t = 0$.

$$y_0 = v_0 \sin\theta_0 0 - \frac{g}{2}0^2 + C \rightarrow C = y_0$$

Substituindo-se a constante *C* na expressão da posição *y*, chegamos ao resultado procurado.

$$\boxed{y = y_0 + v_0 \sin\theta_0 t - \frac{g}{2}t^2}$$

Considere o movimento em queda livre de um paraquedista. Demonstre que a velocidade de queda do paraquedista (*v*) é dada pela seguinte equação.

$$\boxed{v = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)}$$

Modelo do sistema

v: velocidade (*m/s*)
m: massa do corpo em queda livre (*kg*)
g: aceleração da gravidade (m/s^2)
b: coeficiente de resistência do ar (*kg/s*)
t: tempo (*s*)

Na modelagem do sistema, leve em consideração a resistência do ar. A força de arrasto vale $D = bv$, onde *v* é a velocidade e *b* é o coeficiente de resistência do ar (kg/s).

Vamos modelar o movimento de um corpo em queda livre (sistema), como o de um paraquedista que acabou de saltar de um avião mas ainda não abriu o paraquedas (foto abaixo).

Sistema a ser modelado

Se considerarmos a presença da força de arrasto $\vec{D}$ e da força gravitacional $\vec{F}_g$, o nosso sistema tem o seguinte diagrama de corpo livre (figura da direita). Esse processo é a **abstração**.

Sistema a ser modelado

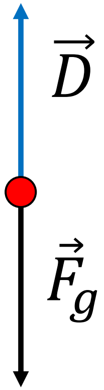


Diagrama de corpo livre

Questão3 (Solução)

Pela análise do diagrama de corpo livre (**abstração**), vemos que não temos forças ao longo do eixo horizontal. Tomando o sentido positivo do eixo *y* apontando para baixo e aplicando-se a segunda lei de Newton, temos a seguinte equação para um paraquedista de massa *m.*

$$\boxed{\sum F_{res} = ma}$$

(Segunda Lei de Newton)

$$\boxed{F_g - D = ma}$$

F_g: Força gravitacional (*N*)
D: Força de arrasto (*N*)
m: massa (Kg)
a: aceleração (m/s^2)

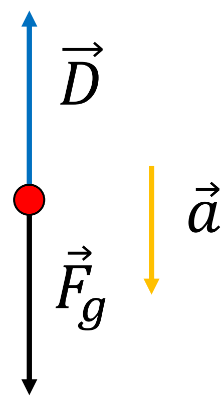


Diagrama de corpo livre

Não há um modelo preciso para a força de arrasto (D) (resistência do ar) atuando sobre um objeto em queda livre, pois esta força parece depender da velocidade do corpo em queda livre (v), da densidade do ar (ρ_{Ar}) e da área da seção reta efetiva, entre outros fatores. Porém, a força de arrasto pode ser aproximada por $-bv$, onde b é o **coeficiente de resistência do ar.** O b é uma constante positiva dependente da densidade do ar e da forma do objeto em queda livre.

$$\boxed{D = bv}$$

D: Força de arrasto (N)
b: coeficiente de resistência do ar (kg/s)
v: velocidade (m/s)

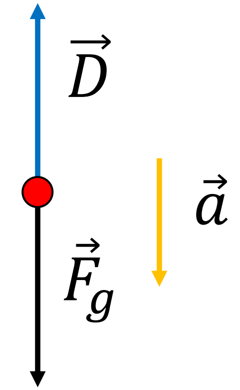


Diagrama de corpo livre

Fazendo as substituições da expressão da força de arrasto e da força gravitacional, chegamos à seguinte equação:

$$F_g - D = ma$$

$$mg - bv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v}$$

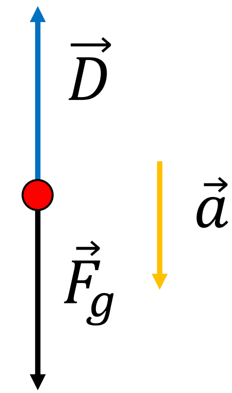


Diagrama de corpo livre

A equação acima é o nosso **modelo**. Ela é uma **equação diferencial linear de primeira ordem**. A equação é de primeira ordem pois a derivada que temos é desta ordem. E é linear por não envolver termos de grau maior que um na variável dependente (*v*). Podemos resolver a equação diferencial acima pela técnica de **separação de variáveis**.

Sistema a ser modelado

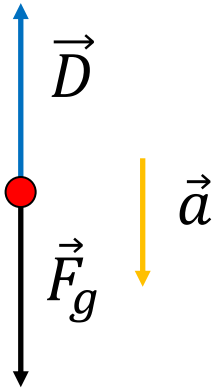


Diagrama de corpo livre

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v}$$

Modelo do sistema

v: velocidade (*m/s*)
t: tempo (*s*)
g: aceleração da gravidade (m/s^2)
b: coeficiente de resistência do ar (*kg/s*)
m: massa do corpo em queda livre (*kg*)

Aplicando-se a separação de variáveis, isolamos os termos que tem velocidade do lado esquerdo e o tempo do lado direito.

$$\frac{dv}{(mg - bv)} = \frac{dt}{m}$$

Em seguida, integramos a equação separada

$$\int \frac{dv}{(mg - bv)} = \int \frac{dt}{m}$$

A integral do lado direito é simplesmente a integral de *dt*, visto que a massa *m* é uma constante. Para resolver a integral da esquerda, faremos uma mudança de variável.

Igualamos $u = mg - bv$.
Assim temos,

$$u = (mg - bv)$$

Tomando a diferencial de ambos os lados da equação acima, chegamos

$$du = -bdv$$

Ou seja,

$$dv = -\frac{du}{b}$$

Podemos substituir a igualdade acima na integral original.

Questão3 (Solução)

Analisando-se a integral da esquerda, temos

$$\int \frac{dv}{(mg - bv)} = \frac{-1}{b} \int \frac{du}{u}$$

Considerando-se ambos os lados da equação original, temos

$$\frac{-1}{b} \int \frac{du}{u} = \int \frac{dt}{m} \rightarrow \int \frac{du}{u} = -\frac{b}{m} \int dt$$

Integrando-se em ambos os lados, temos

$$\ln u = -\frac{b}{m} t + C$$

Usando-se a igualdade *u* = *mg* – *bv*.

$$\ln u = -\frac{b}{m}t + C$$

$$\ln(mg - bv) = -\frac{b}{m}t + C$$

Assim, temos

$$mg - bv = e^{-\frac{b}{m}t}e^{C}$$

Considerando-se $A = e^C$ temos:

$$mg - bv = Ae^{-\frac{b}{m}t}$$

Rearranjando os termos,

$$bv = mg - Ae^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\boxed{v = \frac{mg}{b} - \frac{A}{b}e^{-\frac{b}{m}t}}$$

A equação acima é chamada **solução geral** da equação diferencial.

Para determinar a constante *A* na solução geral, podemos usar a velocidade inicial do paraquedista (v_0). Ou seja, resolvemos **o problema de valor inicial**. Substituindo $v = v_0$ e $t = 0$ na solução geral para a equação diferencial, podemos determinar *A*.

$$v_0 = \frac{mg}{b} - \frac{A}{b}e^{0} \rightarrow \frac{A}{b} = \frac{mg}{b} - v_0$$

Substituindo *A* na equação, temos

$$v = \frac{mg}{b} - \left(\frac{mg}{b} - v_0\right) e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\boxed{v = \frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) e^{-\frac{b}{m}t}}$$

A equação anterior fornece a velocidade do paraquedista caindo no ar como uma função do tempo se a velocidade inicial do objeto for v_0.

Questão3 (Solução)

Se $v_0 = 0$, temos

$$v = \frac{mg}{b} + \left(0 - \frac{mg}{b}\right) e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$v = \frac{mg}{b} + \left(0 - \frac{mg}{b}\right) e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\boxed{v = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)}$$

Se considerarmos $t \to \infty$ vemos que $v \to mg/b$, esta é a velocidade terminal de um corpo em queda livre com massa m.

Sistema a ser modelado

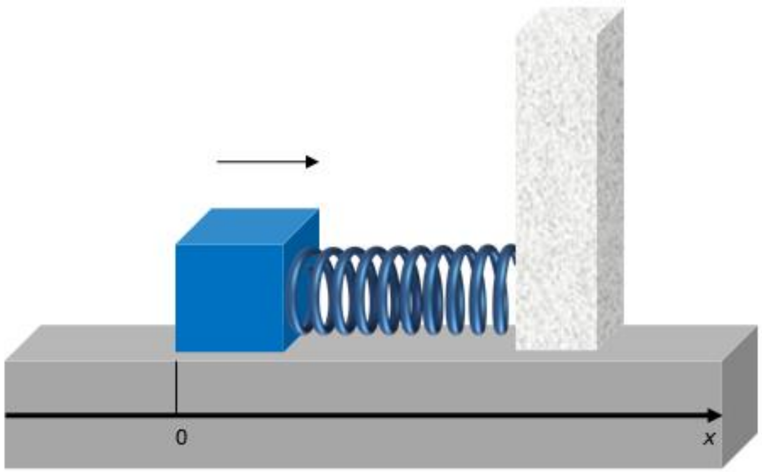
$$v = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

Modelo do sistema

v: velocidade (*m/s*)
m: massa do corpo em queda livre (*kg*)
g: aceleração da gravidade (m/s^2)
b: coeficiente de resistência do ar (*kg/s*)
t: tempo (*s*)

Questão 4

Sistema massa-mola com energia potencial elástica *U(x)*.



Resumo do Sistema Massa-Mola

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \qquad F(x_0) = 0$$

$$F(x) = -kx \qquad U'(x_0) = \frac{dU(x_0)}{dx} = 0$$

No sistema massa-mola temos uma massa ligada a uma mola, que está fixa numa das extremidades e ligada a um bloco que está apoiado numa superfície sem atrito. O bloco oscila sem atrito. A mola tem **constante elástica** *k*. Quando o bloco está na posição x_0, a **força elástica da mola** (*F(x)*) é zero ($F(x_0) = 0$). Consideramos que a **energia potencial do sistema massa-mola** é dada por *U(x)*. Use a expansão por **série de Taylor** e prove que a energia potencial *U(x)* do sistema massa mola tem a seguinte expressão.

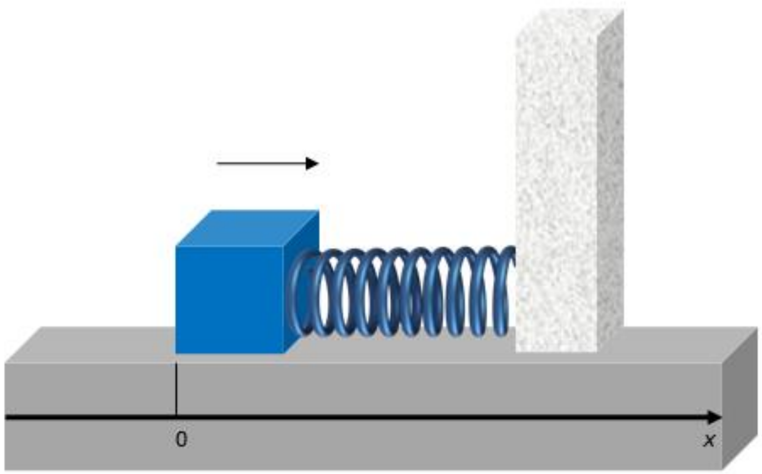
$$\boxed{U(x) = \frac{k}{2}x^2}$$

A equação abaixo tem a expansão em série de uma função *f(x)* em torno de um ponto *a*.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Use a expressão acima para determinar a expansão da função energia potencial *U(x)* em torno do ponto x_0.

Sistema massa-mola com energia potencial elástica *U(x)*.



Resumo do Sistema Massa-Mola

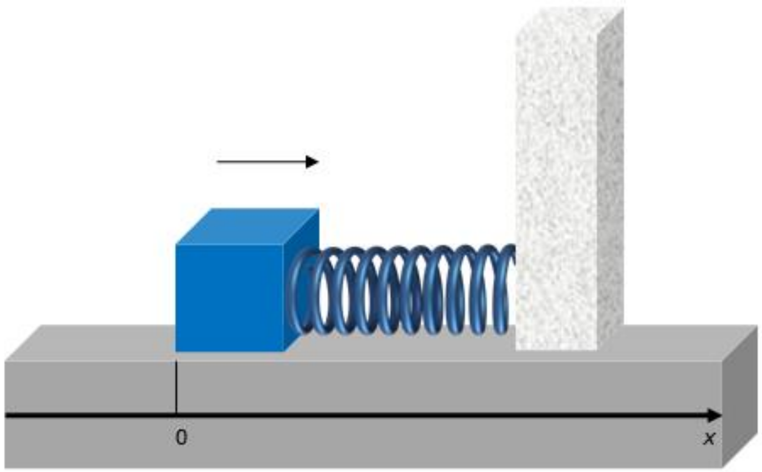
$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \qquad F(x_0) = 0$$

$$F(x) = -kx \qquad U'(x_0) = \frac{dU(x_0)}{dx} = 0$$

Abaixo temos a expansão em série de Taylor da função energia potencial do sistema massa-mola *U(x)* em torno do ponto *x* = *a*.

$$U(x) = U(a) + U'(a)(x-a) + \frac{U''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{U'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{U^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \cdots + \frac{U^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Sistema massa-mola com energia potencial elástica *U(x)*.



Resumo do Sistema Massa-Mola

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \qquad F(x_0) = 0$$

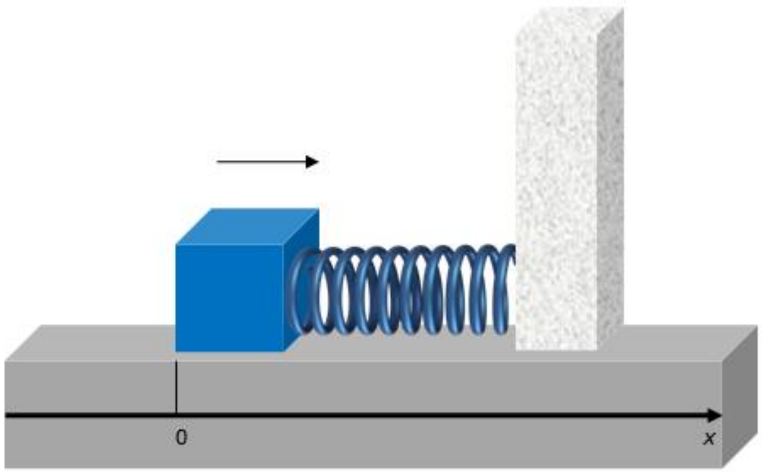
$$F(x) = -kx \qquad U'(x_0) = \frac{dU(x_0)}{dx} = 0$$

Vamos fazer $a = x_0$, a posição de equilíbrio do sistema massa-mola.

$$U(x) = U_0 + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{U''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{U'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{U^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \cdots + \frac{U^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Onde $U_0 = U(x_0)$.

Sistema massa-mola com energia potencial elástica *U(x)*.



Resumo do Sistema Massa-Mola

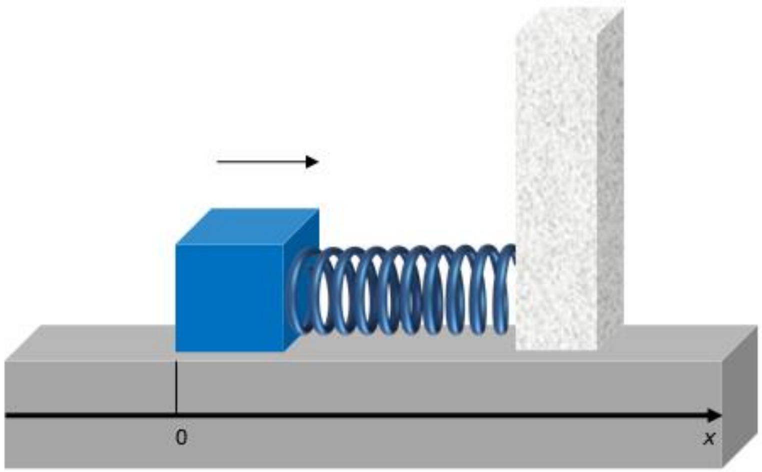
$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \qquad F(x_0) = 0$$

$$F(x) = -kx \qquad U'(x_0) = \frac{dU(x_0)}{dx} = 0$$

Sabemos que $F(x) = -dU/dx = -U'(x)$. Considerando-se $x = x_0$, temos $F(x_0) = -U'(x_0)$. No sistema massa-mola $F(x_0) = 0$. Pois é a situação onde não temos distensão ou compressão da mola, ou seja, $F(x_0) = -U'(x_0) = 0$.

$$U(x) = U_0 + \cancelto{0}{U'(x_0)}(x - x_0) + \frac{U''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{U'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{U^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \cdots + \frac{U^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Sistema massa-mola com energia potencial elástica *U(x)*.



Resumo do Sistema Massa-Mola

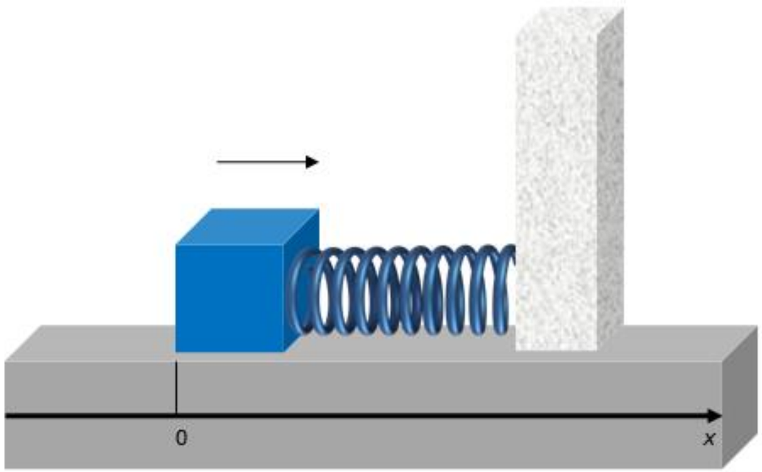
$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \qquad F(x_0) = 0$$

$$F(x) = -kx \qquad U'(x_0) = \frac{dU(x_0)}{dx} = 0$$

Rearranjando-se os termos da série, chegamos ao resultado abaixo.

$$U(x) - U_0 = \frac{U''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{U'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{U^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \cdots + \frac{U^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Sistema massa-mola com energia potencial elástica *U(x)*.



Resumo do Sistema Massa-Mola

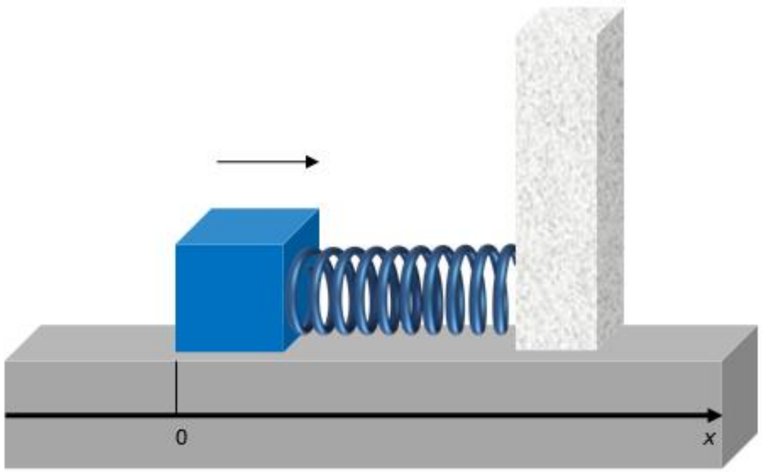
$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \qquad F(x_0) = 0$$

$$F(x) = -kx \qquad U'(x_0) = \frac{dU(x_0)}{dx} = 0$$

Vamos considerar que o sistema só pode apresentar pequenas oscilações, onde x não se afasta muito da posição de equilíbrio x_0. Assim, os termos com potência de 3 em diante são desprezíveis e podem ser eliminados da série abaixo.

$$U(x) - U_0 = \frac{U''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{U'''(x_0)}{3!}\cancelto{0}{(x-x_0)^3} + \frac{U^{(4)}(x_0)}{4!}\cancelto{0}{(x-x_0)^4} + \cdots + \frac{U^{(n)}(x_0)}{n!}\cancelto{0}{(x-x_0)^n} + \cdots$$

Sistema massa-mola com energia potencial elástica *U(x)*.



Resumo do Sistema Massa-Mola

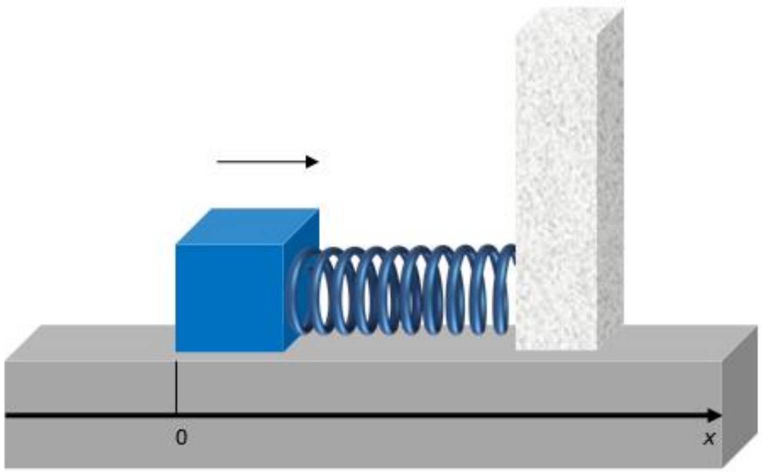
$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \qquad F(x_0) = 0$$

$$F(x) = -kx \qquad U'(x_0) = \frac{dU(x_0)}{dx} = 0$$

Eliminando-se os termos com expoente igual ou maior que 3, chegamos à expressão abaixo. Sabemos que *F(x)* = -*U'(x)* e que *F(x)* = -*kx*. Assim, -*U'(x)* = -*kx*, ou seja, *U'(x)* = *kx*.

$$U(x) - U_0 = \frac{U''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Sistema massa-mola com energia potencial elástica *U(x)*.



Resumo do Sistema Massa-Mola

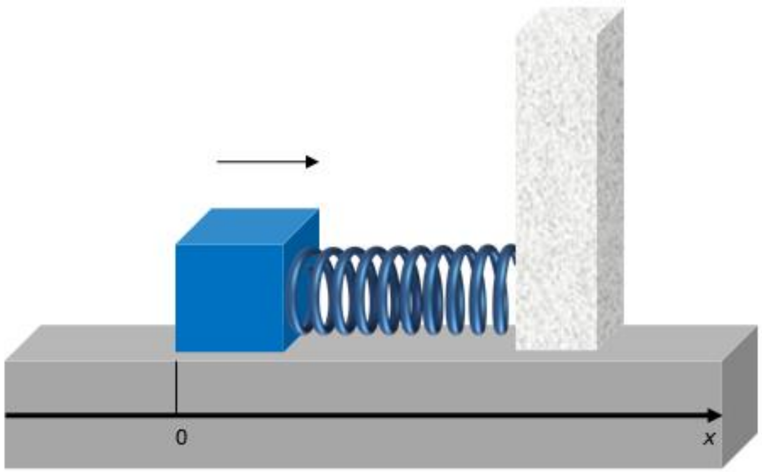
$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \qquad F(x_0) = 0$$

$$F(x) = -kx \qquad U'(x_0) = \frac{dU(x_0)}{dx} = 0$$

Calculando-se a segunda derivada de *U(x)*, temos o seguinte resultado: $U''(x) = k$, ou seja, $U''(x_0) = k$.

$$U(x) - U_0 = \frac{U''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Sistema massa-mola com energia potencial elástica *U(x)*.



Resumo do Sistema Massa-Mola

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \qquad F(x_0) = 0$$

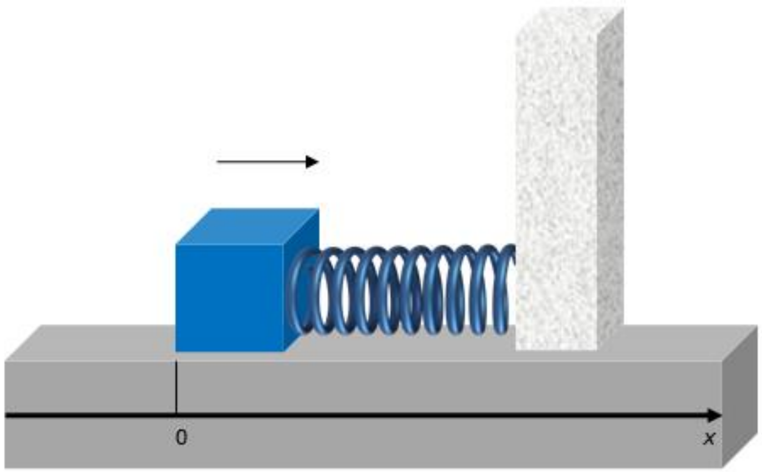
$$F(x) = -kx \qquad U'(x_0) = \frac{dU(x_0)}{dx} = 0$$

Substituindo-se $U''(x_0) = k$ na expressão abaixo, temos a seguinte equação.

$$U(x) - U_0 = \frac{U''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \rightarrow U(x) - U_0 = \frac{k}{2}(x - x_0)^2$$

$$\boxed{U(x) - U_0 = \frac{k}{2}(x - x_0)^2}$$

Sistema massa-mola com energia potencial elástica *U(x)*.



Resumo do Sistema Massa-Mola

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \qquad F(x_0) = 0$$

$$F(x) = -kx \qquad U'(x_0) = \frac{dU(x_0)}{dx} = 0$$

Escolhendo-se $x_0 = 0$ e $U_0 = 0$, temos o resultado esperado.

$$\boxed{U(x) = \frac{k}{2}x^2}$$

Que a luz da ciência acabe com as trevas do negacionismo.

-CHAPRA, Steven C.; Canale, Raymond P. **Métodos Numéricos para Engenharia (Portuguese Edition)**. Edição do Kindle.
- HALLIDAY, David, RESNICK, Robert, WALKER, Jearl. **Fundamentos da Física - Mecânica - Volume 1**. GEN | LTC. Edição do Kindle.
-NAGLE, R. Kent. **Equações diferenciais (Portuguese Edition)**. Edição do Kindle.