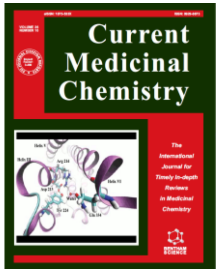
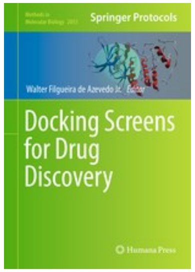
Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

Prof. Dr. Walter F. de Azevedo, Jr.

walter@azevedolab.net

[Biography 01♥]
[Biography 02♥]
[Biography 03♥]
[Biography 04♥]





Conteúdo

- Resumo
- Visão Geral
- Solução da Equação Diferencial de Segunda Ordem
- Fluxograma
- Wronskiano
- Lista de Exercícios 7
- Autor
- Referências

Resumo

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0$$

Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

$b^2 - 4ac > 0$

$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

$y = e^{rt}(c_1 + c_2 t)$

$b^2 - 4ac = 0$

$b^2 - 4ac < 0$

$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$

Hoje iremos resolver equações diferenciais ordinárias de segunda ordem homogêneas. O estudo dessas equações é de grande interesse da Física, visto que temos diversos sistemas que podem ser modelados por esse tipo de abordagem. O paradigma no estudo de equações diferenciais de segunda ordem é o oscilador massa-mola, mas estas equações são usadas na modelagem de outros sistemas, como circuitos RLC e pêndulos. Usaremos o Wronskiano para verificar se as soluções de uma equação diferencial de ordem n ($n \geq 2$) são linearmente independentes.

Palavras-chave: física matemática; equação diferencial ordinária; equação diferencial ordinária de segunda ordem homogênea; raízes reais; raízes complexas; coeficientes constantes; oscilador massa-mola; equação característica; equação auxiliar; linearmente independentes; Wronskiano.

Vamos considerar uma equação diferencial de segunda ordem homogênea, como a indicada abaixo. Esse tipo de equação diferencial é comum na modelagem de sistemas físicos como um oscilador massa-mola sem forças externas atuando.

$$\boxed{a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0} \qquad \text{(Equação 1)}$$

Na equação diferencial acima, os coeficientes *a*, *b* e *c* são constantes. Uma análise da equação diferencial acima indica que a solução *y(t)* envolve uma função que é igual à sua primeira e segunda derivada, a menos de uma constante multiplicativa. A função exponencial (e^{rt}) satisfaz essa condição. Assim podemos propor que a equação diferencial 1 tem como solução a função $y = e^{rt}$, onde *r* pertence pode ser um número real ou complexo.

Para provar que $y = e^{rt}$ é solução da equação diferencial 1, determinamos a primeira e a segunda derivadas de *y* e verificamos se a igualdade da equação 1 é observada.

$$\boxed{a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0} \qquad \text{(Equação 1)}$$

Determinamos a primeira e segunda derivada de *y*, como indicado abaixo.

$$y = e^{rt} \rightarrow \frac{dy}{dt} = re^{rt} \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = r^2e^{rt}$$

Substituindo-se *y* e as suas derivadas na equação 1, temos o seguinte resultado.

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 \rightarrow \boxed{e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0} \qquad \text{(Equação 2)}$$

Como e^{rt} é sempre positivo, podemos dividir ambos os lados da equação 2 por e^{rt}. Chegamos à seguinte expressão.

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0} \qquad \text{(Equação 3)}$$

A equação 3 é chamada **equação característica** ou **equação auxiliar.**

A análise da equação diferencial 1 indica que a solução é obtida a partir da equação característica (equação 3).

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0} \qquad \text{(Equação 3)}$$

Consideramos que *a*, *b* e *c* são constantes, temos que as soluções da equação 3 são as seguintes.

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A solução da equação diferencial 1 envolve três situações distintas.

$$\boxed{a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0} \qquad \text{(Equação 1)}$$

1) $\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$, temos duas raízes reais distintas r_1 e r_2.

2) $\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$, temos duas raízes reais iguais $r_1 = r_2$.

3) $\boldsymbol{b^2 - 4ac < 0}$, temos duas raízes complexas conjugadas $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$.

Se considerarmos que a equação 1 tem duas soluções **linearmente independentes** y_1 e y_2, podemos dizer que a combinação linear $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é solução da equação 1.

$$\boxed{a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0}$$ (Equação 1) $$y = c_1y_1 + c_2y_2$$ (Equação 4)

Para provar que y é solução da equação 1, tomamos a primeira e segunda derivadas da equação 4 e substituímos na equação diferencial 1, como segue.

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \rightarrow \frac{dy}{dy} = c_1\frac{dy_1}{dt} + c_2\frac{dy_2}{dt} \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = c_1\frac{d^2y_1}{dt^2} + c_2\frac{d^2y_2}{dt^2}$$

$$a\left(c_1\frac{d^2y_1}{dt^2} + c_2\frac{d^2y_2}{dt^2}\right) + b\left(c_1\frac{dy_1}{dt} + c_2\frac{dy_2}{dt}\right) + c(c_1y_1 + c_2y_2)$$

Rearranjando-se os termos, temos o seguinte resultado.

$$c_1\left(a\frac{d^2y_1}{dt^2} + b\frac{dy_1}{dt} + cy_1\right) + c_2\left(a\frac{d^2y_2}{dt^2} + b\frac{dy_2}{dt} + cy_2\right)$$

Como y_1 e y_2 são soluções da equação 1, temos.

$$c_1(0) + c_2(0) = 0 + 0 = 0$$

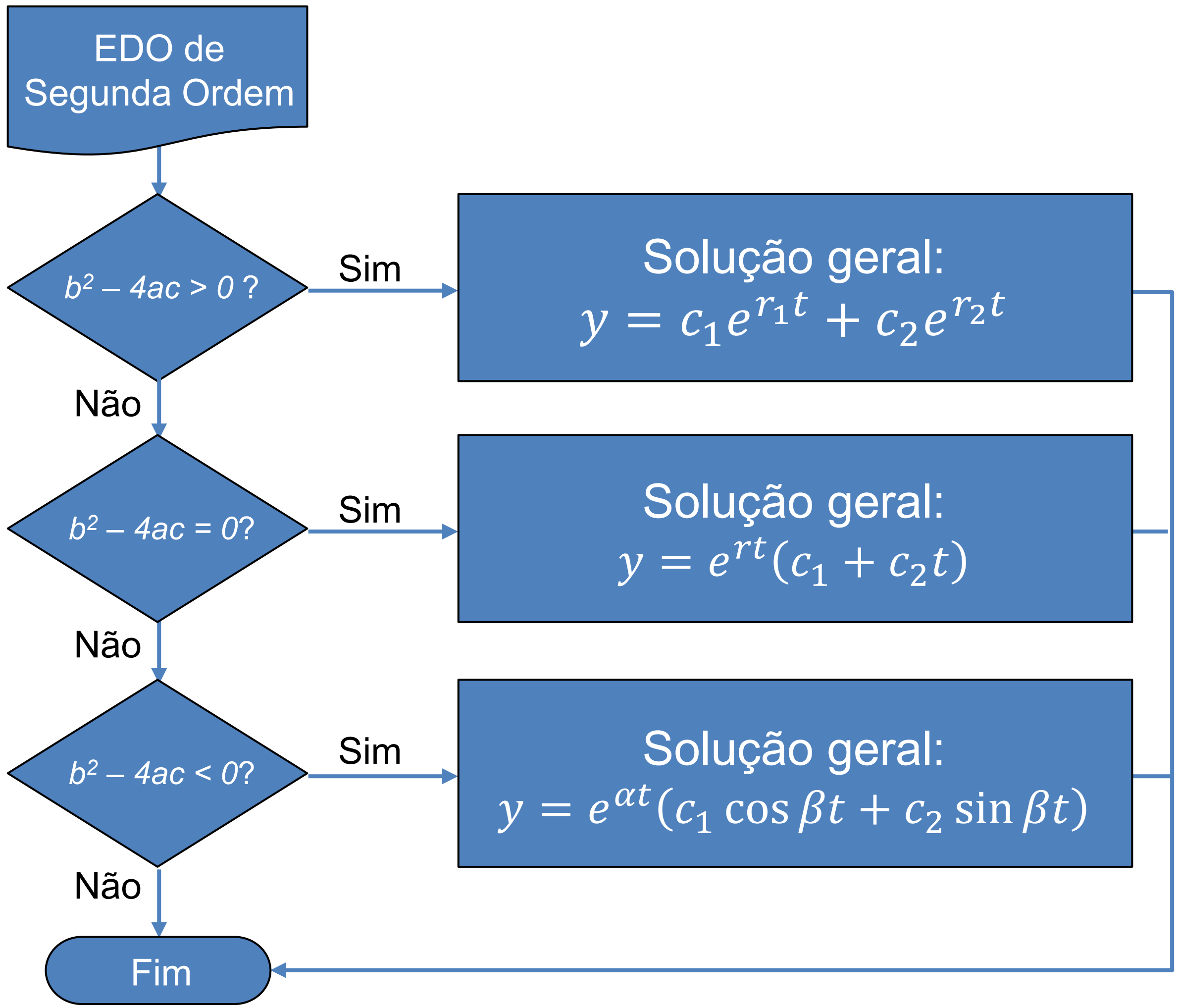
Abaixo temos uma tabela com as soluções gerais de uma **equação linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes**.

$$\boxed{a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0} \quad \text{(Equação 1)} \qquad \boxed{ar^2 + br + c = 0} \quad \text{(Equação 3)}$$

Natureza das Raízes r_1 e r_2	Solução Geral
Caso 1 (**$b^2 - 4ac > 0$**) Raízes reais e distintas ($r_1 \neq r_2$)	$y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$
Caso 2 (**$b^2 - 4ac = 0$**) Raízes reais e iguais ($r_1 = r_2$)	$y = e^{rt}(c_1 + c_2t)$
Caso 3 (**$b^2 - 4ac < 0$**) Raízes complexas conjugadas ($r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$)	$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t)$

Fluxograma

A tabela descrita anteriormente pode ser colocada como o fluxograma descrito ao lado.



EDO: Equação diferencial ordinária

Mostramos anteriormente que se a equação diferencial 1 tem duas soluções **linearmente independentes** y_1 e y_2, a combinação linear $y = c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução da equação 1. Assim, verificar se duas soluções são linearmente independentes, é um aspecto importante no estudo de equações diferenciais de segunda ordem. Uma forma de verificar se um conjunto de n de soluções (y_1, y_2, y_3,..., y_n) são linearmente independentes é por meio do conceito de **Wronskiano**.
Definimos o **Wronskiano** $\boldsymbol{W(y_1,y_2,\ldots y_n)}$ de um conjunto de n funções (y_1, y_2, y_3,..., y_n) como um determinante que tem a seguinte forma.

$$W(y_1,y_2,\ldots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \ldots & y_n' \\ \ldots & & & & \\ & & & & \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & \ldots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Se $W(y_1,y_2,\ldots y_n)$ no intervalo $a \leq x \leq b$ for nulo ($W(y_1,y_2,\ldots y_n) = 0$) em ao menos um ponto do intervalo, então as funções y_1, y_2, y_3,..., y_n são **linearmente independentes** neste intervalo**.**

Vamos considerar as funções definidas abaixo e verificar se elas são linearmente independentes por meio do cálculo do Wronskiano.

Exemplo 1: $y_1 = e^t$ e $y_2 = e^{-t}$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \times y_2' - y_2 \times y_1'$$

$$W(y_1, y_2) = y_1 \times y_2' - y_2 \times y_1' = e^t \times (-e^{-t}) - e^{-t} \times e^t = -1 - 1 = -2$$

$W(y_1, y_2) = -2 \neq 0 \rightarrow$ ***y₁* e *y₂* são linearmente independentes**

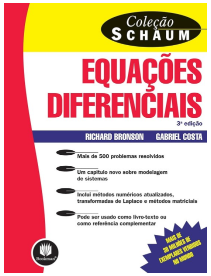
Wronskiano

Exemplo 2: $y_1 = x, y_2 = x^2$ e $y_3 = x^3$

$$W(x, x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ \dfrac{d(x)}{dx} & \dfrac{d(x^2)}{dx} & \dfrac{d(x^3)}{dx} \\ \dfrac{d^2(x)}{dx^2} & \dfrac{d^2(x^2)}{dx^2} & \dfrac{d^2(x^3)}{dx^2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3$$

$W(y_1, y_2) = 2x^3 \neq 0\ para\ x \neq 0 \rightarrow$ ***y*₁, *y*₂ e *y*₃ são linearmente independentes**

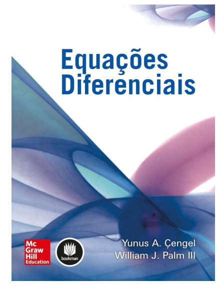


Fonte:
BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel. **Equações Diferenciais (Coleção Schaum)** (Portuguese Edition) (p. 90). Edição do Kindle.

Lista de Exercícios 7

1) Determine a solução geral da equação diferencial abaixo.

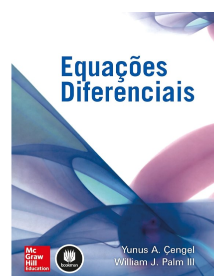
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 0$$



Resposta: $y = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t}$
CENGEL, Yunus A.; Palm III, William J. **Equações Diferenciais** (p. 123) (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

2) Determine a solução geral da equação diferencial abaixo.

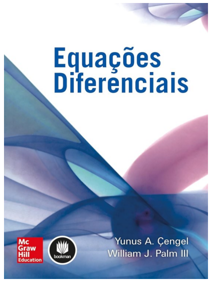
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$$



Resposta: $y = e^{-3t}(c_1 + c_2 t)$
CENGEL, Yunus A.; Palm III, William J. **Equações Diferenciais** (p. 126) (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

3) Determine a solução geral da equação diferencial abaixo.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$



Resposta:

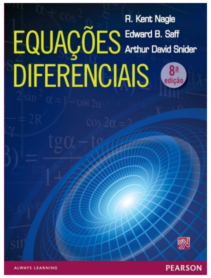
$$y = e^t\left(c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t\right)$$

CENGEL, Yunus A.; Palm III, William J. **Equações Diferenciais** (p. 127) (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

4) Resolva o problema de valor inicial abaixo.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - y = 0;$$

$$y(0) = 0, \frac{dy}{dt}(0) = -1$$

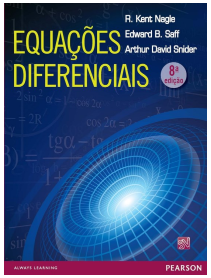


Resposta: $y = -\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-1}\left(e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}\right)$

NAGLE, R. Kent. **Equações Diferenciais** (p. 116) (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

5) Determine a solução geral da equação diferencial abaixo.

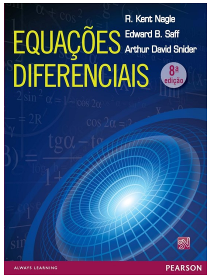
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$$



Resposta: $y = e^{-2t}(c_1 + c_2 t)$
CENGEL, Yunus A.; Palm III, William J. **Equações Diferenciais** (p. 119) (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

6) Ache uma solução geral para a seguinte equação diferencial.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

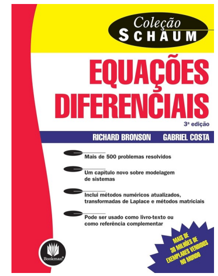


Resposta:

$$y = e^{-t}\left(c_1 \cos\sqrt{3}t + c_2 \sin\sqrt{3}t\right)$$

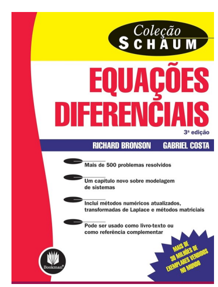
NAGLE, R. Kent. **Equações Diferenciais** (p. 125) (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

7) Determine o Wronskiano *(W)* do conjunto {*sen 3x*, *cos 3x*}.



Resposta: $W = -3$
BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel. **Equações Diferenciais (Coleção Schaum)** (Portuguese Edition) (p. 90). Edição do Kindle.

8) Verifique $y_1 = e^x$ e $y_2 = x.e^x$ são linearmente independentes.



Resposta: $W = e^{2x}$.
y_1 e y_2 são linearmente independentes.

BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel. **Equações Diferenciais (Coleção Schaum)** (Portuguese Edition) (p. 92). Edição do Kindle.

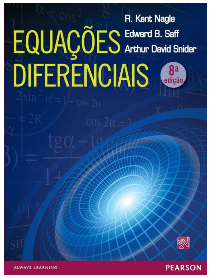
9) Considere um oscilador massa-mola amortecido com a seguinte equação diferencial.

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0$$

Os termos acima são fisicamente identificados como indicado a seguir.

$$[inécia]\frac{d^2y}{dt^2} + [amortecimento]\frac{dy}{dt} + [rigidez]y = 0$$

Determine a equação do movimento para um sistema massa-mola quando *m* = 36 kg, *b* = 12 kg/s (que é equivalente a 12 N-s/m), *k* = 37 kg/s^2 , *y*(0) = 0,7 m e *y'*(0) = 0,1 m/s. Encontre também *y*(10), o deslocamento após 10 s.

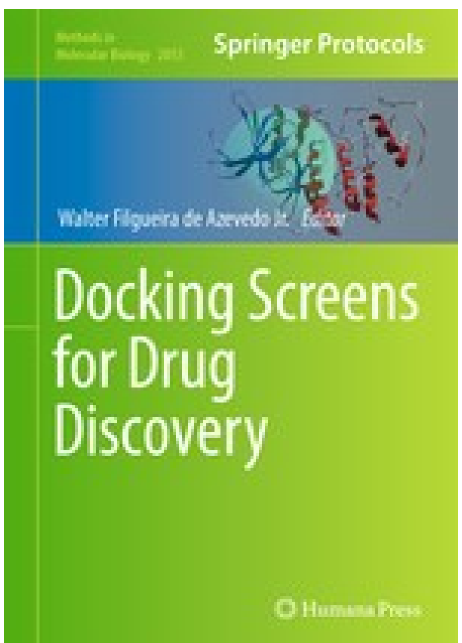


Respostas:

$$y = e^{-\frac{t}{6}}\left(0{,}7\cos t + \frac{1{,}3}{6}\sin t\right)$$

$$y(10) = 0{,}13\, m$$

NAGLE, R. Kent. **Equações Diferenciais** (p. 125) (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

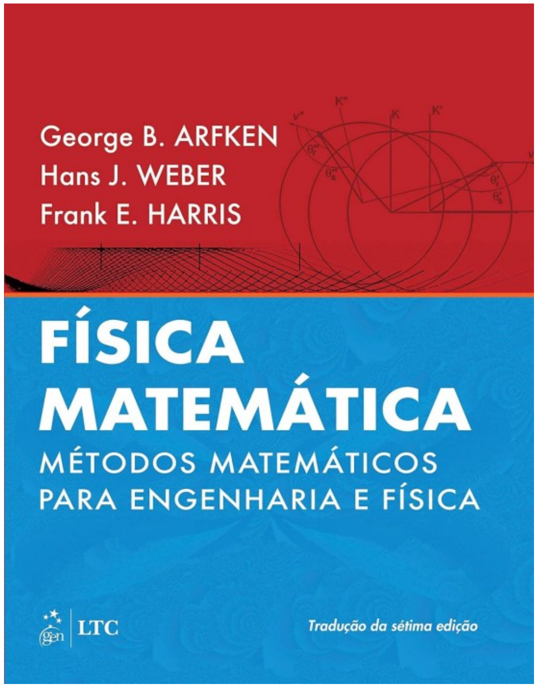


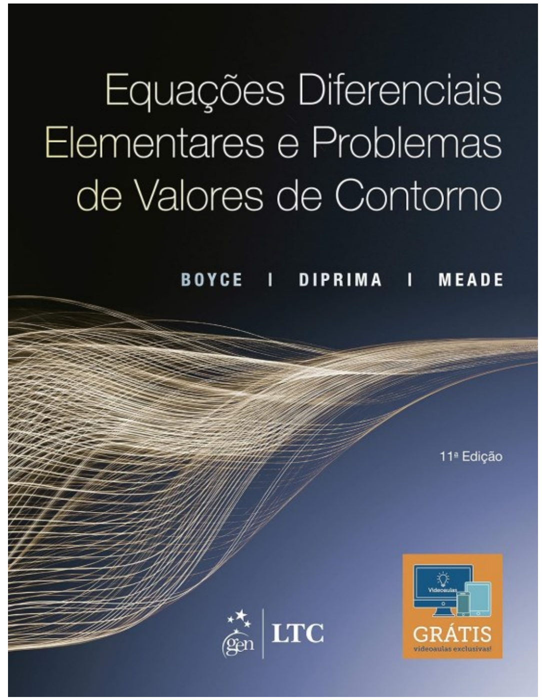
Dr. Walter F. de Azevedo, Jr. earned a BSc in Physics (1990), an MSc in Applied Physics (1992), and a DSc in Applied Physics (1997) from the University of São Paulo (Brazil). In his doctoral studies, Dr. Azevedo worked under the supervision of Prof. Yvonne Primerano Mascarenhas (University of São Paulo) and Prof. Sung-Hou Kim (University of California, Berkeley) on a split Doctoral program with a fellowship from the Brazilian Research Council (CNPq). During his first two years at Berkeley, he was under a CNPq fellowship (1993-95). Due to his performance, Prof. S.-H. Kim hired him as Visiting Researcher for the Department of Chemistry, University of California at Berkeley (1995-96).

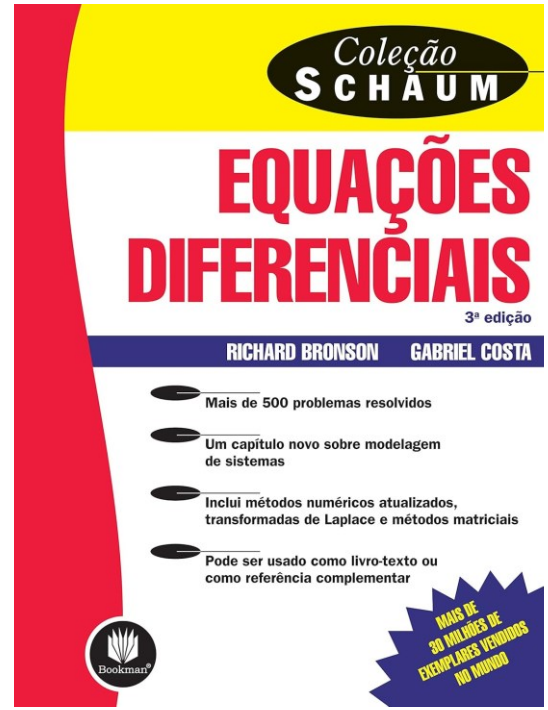
The work developed during these three years at Berkeley resulted in his thesis about the structure of Cyclin-Dependent Kinase 2 (CDK2) in complex with inhibitors (PDB access code: 2A4L) (de Azevedo et al., 1996; de Azevedo et al., 1997). Dr. Azevedo is the first author of both papers, and these publications gathered more than 1,000 citations on the Web of Science. During 1997-98 he had a postdoc position at São Paulo State University (Unesp) with a Fapesp fellowship. He holds a habilitation degree in Physics (livre-docência) from the São Paulo State University (Unesp)(2004). In 1998, Dr. Azevedo participated in a research project with NASA that sent proteins to crystallize in a microgravity environment onboard the Space Shuttle Discovery (STS-95). This research had coverage of Brazilian TV networks. He published a book entitled "Docking Screens for Drug Discovery" with Springer Nature in 2019. This book sold 48,000 copies (June 2024) with over 2 million dollars in sales (https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4939-9752-7). In 2020, the Journal Plos Biology ranked Dr. Azevedo among the most influential researchers in the world (Fields: Biochemistry & Molecular Biology and Biophysics).

Dr. Azevedo has vast editorial experience. He is the frontiers section editor (Bioinformatics/Biophysics) for the Current Drug Targets, section editor (Bioinformatics in Drug Design and Discovery) for the Current Medicinal Chemistry, review editor for Frontiers in Chemistry, associate editor for Exploration of Drug Science, member of the editorial boards Molecular Diversity and the Journal of Molecular Structures, and editor of Docking Screens for Drug Discovery (Methods of Molecular Biology)-Springer Nature. He is a reviewer for over 60 high-impact journals, including Nature Communications and Briefings in Bioinformatics. His research interests are interdisciplinary, with three main emphases: machine learning, complex systems, and computational systems biology. Dr. Azevedo has over 200 scientific publications about protein structures, computer models of complex systems, and simulations of protein systems. These workers have over 7800 citations in Scopus (h-index: 50) and (m-quotient > 1.7), +7300 citations on the Web of Science (h-index: 48), and +9700 citations on Google Scholar (h-index: 53).

Referências





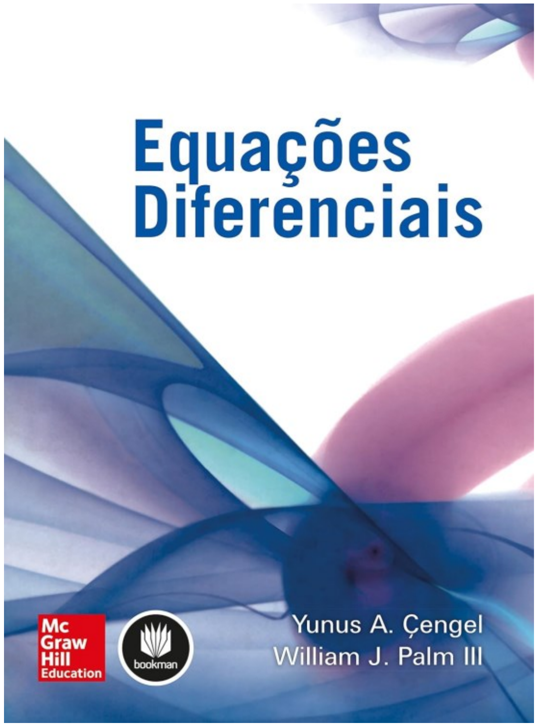


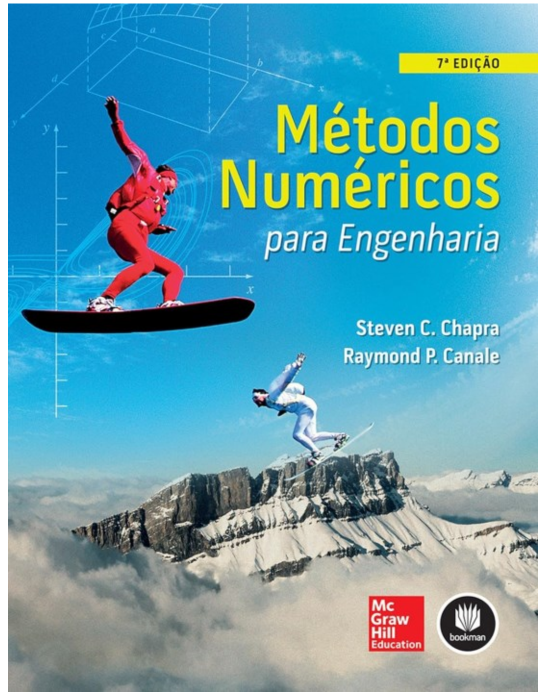
ARFKEN, George. **Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física** (Portuguese Edition). GEN LTC. Edição do Kindle.

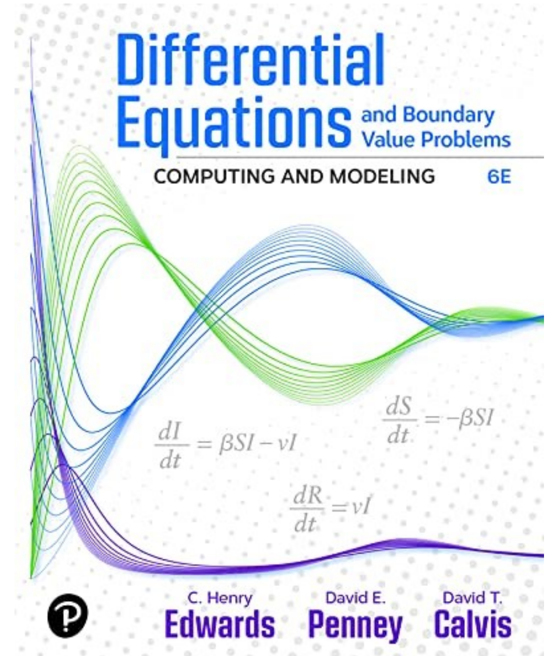
BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C.; MEADE, Douglas B**. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno** (Portuguese Edition). LTC. Edição do Kindle.

BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel. **Equações Diferenciais (Coleção Schaum)** (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

Referências





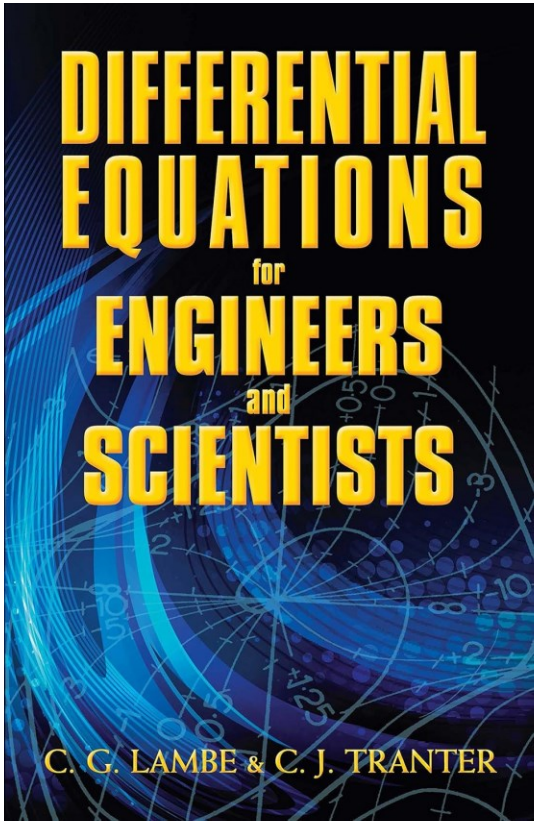


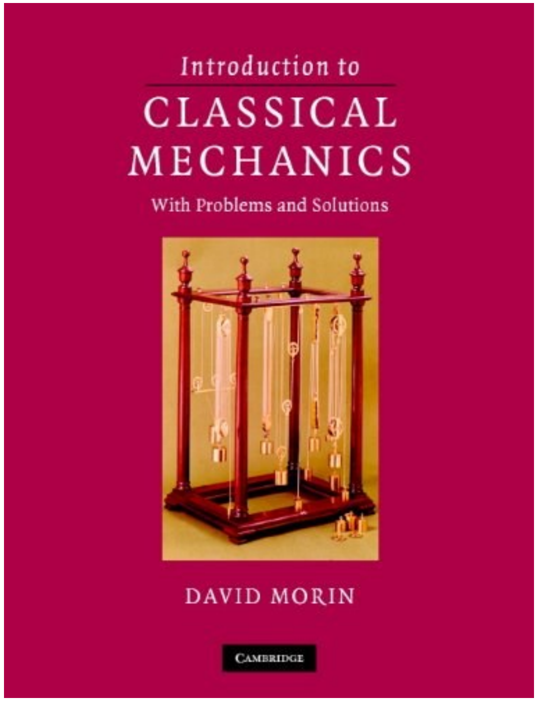
CENGEL, Yunus A.; Palm **III**, William J. **Equações Diferenciais** (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

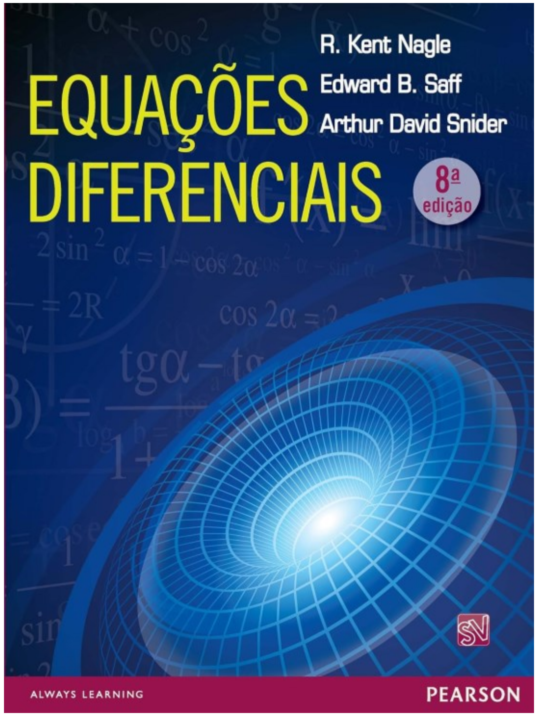
CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos Numéricos para Engenharia** (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

EDWARDS, C. Henry; PENNEY, David E.; CALVIS, David. **Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling**. Pearson Education. Edição do Kindle.

Referências







LAMBE, C.G.; TRANTER, C.J. **Differential Equations for Engineers and Scientists** (Dover Books on Mathematics). Dover Publications. Edição do Kindle.

MORIN, David. **Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions.** Cambridge University Press. Edição do Kindle.

NAGLE, R. Kent. **Equações Diferenciais** (Portuguese Edition). Edição do Kindle.

Que a luz da ciência acabe com as trevas do negacionismo.